代数拓扑 1

孙天阳

目录

Chapter 1

连通性

1 连通性：定义和例子

1.1 连通性：定义

1.2 连通性：等价刻画

上面的定义符合直觉但有一点复杂. 幸运的是我们有其他几种等价方式来描述连通性.

命题 1.1 (连通性的等价刻画)**.** 下列命题等价：

(1) X 是不连通的.

(2) 存在非空不交开集 $A, B \subset X$ 使得 $X = A \cup B$.

(3) 存在非空不交闭集 $A, B \subset X$ 使得 $X = A \cup B$.

(4) 存在 $A \neq \varnothing, A \neq X$ 使得 A 在 X 中是既开又闭的.

(5) 存在连续满射 $f : X \to \{0, 1\}$.

证明. (2) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) 是显然的.

(1) $\Longrightarrow$ (3). 由 $A \cap \overline{B} = \varnothing$，有 $A \cap B = \varnothing$，又 $A \cup B = X$，故 $B = A^c$. 因 $A \cap \overline{B} = \varnothing$，从而 $\overline{B} \subset A^c = B$，从而 B 是闭集. 同理 A 是闭集.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 是显然的.

(5) $\Longrightarrow$ (2) 是显然的.

(2) $\Longrightarrow$ (5). 定义 $f(A) = 0, f(B) = 1$，按定义它是连续满射. □

1.3 连通与不连通空间的例子

例 1.2. $(X, \mathscr{T}_{trivial})$ 是连通的，而当 $|X| \geqslant 2$ 时 $(X, \mathscr{T}_{discrete})$ 是不连通的.

例 1.3. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 是不连通的. 注意到 $\mathbb{Q}$ 中唯一的连通子集是孤立点集，因为任意两个有理数之间总是存在无理数. 但是，$\mathbb{Q}$ 上的子空间拓扑不是离散拓扑！

定义 1.4. 我们称拓扑空间是完全不连通的如果唯一的连通子集是孤立点集.

例 1.5. $\mathbb{Q}$，$\mathbb{Q}^c$，康托集，离散空间全都是完全不连通的.

例 1.6. $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey}$ 是完全不连通的. 对任意包含至少两个元素的子集 $A \subset \mathbb{R}$，不妨设为 $a < b$，取 $c \in (a, b)$. 按定义，

1.4 连通性方法

连通性是最简单的拓扑性质之一. 它符合直觉并且相对容易理解，并且它是证明许多著名结果的有力工具，例如，介值定理.

对于有简单图象的拓扑空间，容易判断这个空间是否是连通的. 但对于更复杂的空间，判断它是否连通可能是复杂的.

对于我们不知道如何画图的抽象拓扑空间，我们总是想问连通性的问题. 例如，离散拓扑（多于一个元素）应该是非常不连通的. 但是，Sorgenfrey 直线是连通的还是不连通的？$[0, 1]$ 上的连续函数是连通的还是不连通的？当然其中某些问题不是那么有趣的. 但是，人们确实关心下列在分析中自然产生的问题：$\mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ 连通吗？$\mathcal{C}(\mathcal{S}^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ 连通吗？路径空间 $\left\{\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], X) \middle| \gamma(0) = \gamma(1)\right\}$ 连通吗？

所以我们需要连通性的严格定义. 在我们给出严格定义之前按，让我们首先看一些 $\mathbb{R}$ 中的集合

$$(a)(0, 3)$$

定义 1.7. 设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间.

(1) 我们称 X 是不连通的,如果存在非空集合 $A, B \subset X$ 使得 $X = A \cup B$ 并且 $A \cap \overline{B} = \overline{A} = B = \varnothing$.

(2) 我们称 X 是连通的如果它不是不连通的.

(3) 我们称子集 $A \subset X$ 连通/不连通如果当赋予 A 子空间拓扑时 A 是连通/不连通的.

注记. 空集是连通的.

注记. 在小空间不交不代表大空间中和小空间交的开集是不交的.

例 1.8. $(X, \mathscr{T}_{trivial})$ 是连通的.
$(X, \mathscr{T}_{discrete})(|X| \geqslant 2)$ 是不连通的.
$\mathbb{Q}$ 是不连通的.

注记. 如果非空子集 $A \subset \mathbb{Q}$ 是连通的，那么 A 一定是单点集.
但是，$(\mathbb{Q}, \mathscr{T}_{subspace})$ 不是 $(\mathbb{Q}, \mathscr{T}_{discrete})$.
因为每个单点集不是开集.

定义 1.9. 我们称 X 是完全不连通的，如果每一个 X 的每个非空连通子集都是独点集.

例 1.10. $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c, (X, \mathscr{T}_{discrete}), Cantor$

例 1.11. $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 是完全不连通的.
考虑任意 $A \subset \mathbb{R}$，有两个元素 $a < b \in A$.
取 $a < c < b$，$A = (A \cap (-\infty, c)) \cup (A \cap [c, +\infty))$

例 1.12. $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Euclidean})$ 是连通的.

证明. 假设 $\mathbb{R} = U \cup U^c$.

假设 $a \in U, b \in U^c$，不是一般性，可以假设 $a < b$.

令 $A = \{x \big| x \in U, x < b\} \neq \varnothing$.

数学分析告诉我非空有上界集合有上确界，记为 c.

断言 $c \notin U$ 且 $c \notin U^c$.

- 如果 $x \in U$，因为 U 是开集，$c + \varepsilon < b$ 在 U 里. 问题：c 为什么不能等于 b. 答：因为 b 在 U^c 里，可以拿一个小开区间把 b 包住.

□

注记. (1) 类似地，任意区间是连通的.

(2) 一般地，类似的结论对赋予序拓扑的全序集 $(X, <)$ 成立如果

   (a) 任意非空有上界集有上确界.

   (b) 任意 $a < b$，存在 c 使得 $a < c < b$.

连续性方法.

为了证明一族性质 $P(t)$ 对于 $t \in I$ 成立，其中 I 是一个区间. 我们只需要验证

- 存在 $t_0 \in I$ 使得 $P(t_0)$ 成立.
- $\{t \big| P(t) holds\}$ 在 I 中是开集.
- $\{t \big| P(t) holds\}$ 在 I 中是闭集.

从而 $P(t)$ 对所有 $t \in I$ 成立.

例 1.13. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 解析，存在 x_0 使得 $f^{(n)}(x_0) = 0$，对任意的 n，$\Longrightarrow f \equiv 0$.

证明.

-
-
-

□

2 连通性的有关结果

2.1 广义介值定理

定理 2.1 (广义介值定理)**.** 设 $f: X \to Y$ 是连续的.A 是 X 中的连通子集，则 $f(A)$ 是连通的.

证明. 假设 $f(A)$ 是不连通的. 存在 $V_1, V_2 \subset Y$ 使得 $V_1 \cap f(A), V_2 \cap f(A)$ 是非空的而且 $f(A)$ 是它们的并. 且 $V_1 \cap V_2 \cap f(A) = \varnothing$.

$f^{-1}(V_1 \cap f(A)) \cup f^{-1}(V_2 \cap f(A)) = f^{-1}((V_1 \cap f(A) \cup (V_2) \cap f(A))) = f^{-1}(f(A)) = A$.

从而 A 是不连通的，矛盾. □

推论 2.2. (1) 如果 $X \simeq Y$，那么 X 连通当且仅当 Y 连通.

(2)（IVT）如果 X 是连通的，$f: X \to \mathbb{R}$，$a < b \in f(X)$，任意 $c \in (a, b)$，存在 x 使得 $f(x) = c$.

推论 2.3 (Borsuk-Ulam,n=1)**.** 设 $f: \mathcal{S}^1 \to \mathbb{R}$，存在 x_0 使得 $f(x_0) = f(-x_0)$.

证明. 取 $F(x) = f(x) - f(-x)$. 取 $a \in \mathbb{S}^1$，考虑 $F(a)$ 和 $F(-a)$. □

2.2 闭包

命题 2.4. 如果 A 是连通的，$A \subset B \subset \overline{A}$，那么 B 是连通的.

证明. 假设 B 不连通. 考虑 $B = B_1 \cup B_2$，$B_i = B \cap U_i$，B_1, B_2 非空，$B_1 \cap B_2 = \varnothing$，$U_1, U_2$ 是开集.

令 $A_1 = A \cap U_1, A_2 = A \cap U_2$. 由 $B \subset U_1 \cup U_2$ 知 $A \subset U_1 \cup U_2$. 不是一般性，可设 $A_1 \neq \varnothing$. 那么 $A_2 = \varnothing$，从而 $A \subset U_2^c$，所以 $B \subset \overline{A} \subset U_2^c$，推知 $B_2 = \varnothing$，矛盾. □

推论 2.5. A 连通 $\Longrightarrow \overline{A}$ 是连通的.

推论 2.6. 拓扑正弦曲线是连通的.

2.3 并

命题 2.7. $A_\alpha \subset X$ 设 A_α 连通，$\bigcap\limits_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$，那么 $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ 是连通的.

证明. 假设 $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha = (Y_1 \cap \bigcup\limits_\alpha A_\alpha) \cup (Y_2 \cap \bigcup\limits_\alpha A_\alpha)$.

取 $x \in \bigcap\limits_\alpha A_\alpha$，不失一般性，设 $x \in Y_1 \cap \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$

所以 $x \in Y_1 \cap A_\alpha$，任意 α.

而 $A_\alpha = (Y_1 \cap A_\alpha) \cup (Y_2 \cap A_\alpha)$，从而 $Y_2 \cap A_\alpha = \varnothing$，矛盾. □

推论 2.8. A_n 是连通的，$A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$，那么 $\bigcup\limits_n A_n$ 是连通的.

证明. 先证每个 $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ 是连通的，再将所有 B_n 并起来. □

2.4 乘积

命题 2.9. X, Y 连通，那么 $X \times Y$ 也是连通的.

证明. 画画图，看看那些集合都是什么. $\square$

事实上连通空间是可乘的.

命题 2.10. X_α 连通，则 $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product})$ 是连通的，$\alpha \in \Lambda$.

证明. 固定 $a_\alpha \in X_\alpha$.

对任意有限子集 $K \subset \Lambda$，我们有 $\prod_{\alpha \in K} X_\alpha$ 是连通的.

令 $X_K = \big\{(x_\alpha) \big| x_\alpha = a_\alpha \text{for } \forall \alpha \neq K\big\}$.

那么 X_k 是连通的，因为它是嵌入映射 $\prod_{\alpha \in K} X_\alpha \hookrightarrow \prod_\alpha X_\alpha = \prod_(\alpha \in K) X_\alpha \times \prod_{\alpha \notin K} X_\alpha$ 的像.

注意到 $(a_\alpha) \in \bigcap_K X_K$，则 $X := \bigcup_K X_k$ 是连通的.

事实上，$\overline{X} = \prod_\alpha X_\alpha$，从而 $\prod_\alpha X_\alpha$ 是连通的.

考虑 $X^c = \bigcap_K X_K^c$， $\square$

注记. 相反如果 $\prod_\alpha X_\alpha$ 是联通的，那么每个 X_α 是连通的，因为它是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 在投影映射这个连续映射下的像

注记. 当赋予箱拓扑，$\mathcal{M}([0,1], \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{[0,1]} = \prod_{\alpha \in [0,1]} \mathbb{R}$ 是不连通的，尽管每个分量 $\mathbb{R}$ 都是连通的.

3 PSet09-1

(1)[Connectedness of subspace]
Let $(X, \mathscr{T})$ be a topological space, and $Y \subset X$ be a subspce. Which of the following statements are equivalent to the fact "Y is disconnected"?

Prove the equivalence for the correct ones and give counterexamples for the wrong ones:

(a) There exists non-empty sets $A, B \subset X$ with $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$, such that $Y = A \cup B$, where the closure is taken in to be the closure in X.

(b) There exists open sets A, B in X with $A \cap B \cap Y = \varnothing$, such that $Y \subset A \cup B$ and $A \cap Y \neq \varnothing$,$B \cap Y \neq \varnothing$.

(c) There exists disjoint open sets A, B in X with $A \cap Y \neq \varnothing$,$B \cap Y \neq \varnothing$,such that $Y \subset A \cup B$.

(d) There exists disjoint closed sets A, B in X with $A \cap Y \neq \varnothing$,$B \cap Y \neq \varnothing$,such that $Y \subset A \cup B$.

(e) There exists a set A which is both open and closed in X such that $A \cap Y \neq \varnothing$ and $A \cap Y \neq Y$.

证明.

(a) 正确.

- (a) $\Longrightarrow Y$ 不连通.$\overline{A}_Y \subset \overline{A}_X$，$\overline{A}_X \cap B = \varnothing \Longrightarrow \overline{A}_Y \cap B = \varnothing$.
- Y 不连通 $\Longrightarrow$ (a).$\overline{A}_Y = \overline{A}_X \cap Y$，因此 $\overline{A}_X \cap B = \overline{A}_X \cap B \cap Y = \overline{A}_Y \cap B = \varnothing$.

(b) 正确. 显然.

(c) 充分不必要.

反例：$X = \{a, b, c\}$，$\mathscr{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

其中 $\{b, c\}$ 是不连通的，但不存在不交开集符合要求.

(d) 充分不必要.

反例：$X = \{a, b, c\}$，$\mathscr{T} = \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

其中 $\{b, c\}$ 是不连通的，但不存在不交闭集符合要求.

实际上是将上一问的反例中的开集定义为闭集.

(e) 充分不必要. 反例还是这个反例.

$\square$

(2)[Connected + suitable separation axioms v.s. countability]

(a) Prove: If $(X, \mathscr{T})$ is (T1), (T4) and connected, and X contains at least two elements, then X contains uncountably many elements.

(b) Can we replace (T4) by (T3)?

(c) [The Golomb space] Define a topology on $\mathbb{N}_{>0}$ as follows: For any coprime positive integers a and b, let $D_{a,b} = \mathbb{N}_{>0} \cap \{a + bk | k \in \mathbb{N}_{\geqslant 0}\}$. Consider the topoloty $\mathscr{T}_{Golomb}$ generated by these $D_{a,b}$'s.It turns out that $(\mathbb{N}_{>0}, \mathscr{T}_{Golomb})$ is (T2), connected but contains countably elements:

(i) Prove: $\mathcal{B} = \{D_{a,b} | a, b \text{ are coprime positive integers}\}$ is a basis of $\mathscr{T}_{Golomb}$.

(ii) Prove: $(\mathbb{N}_{>0}, \mathscr{T}_{Golomb})$ is (T2).

(iii) Prove: $(\mathbb{N}_{>0}, \mathscr{T}_{Golomb})$ is connected. Is it compact or (T3) or metrizable?

(iv) The *Dirichlet Theorem* in number theory asserts that every $D_{a,b}$ (with a,b coprime) contains infinitely many prime numbers. Explain this using the language of topology.

证明.

(a)
- 由假设，至少含两个点.
- 由 T1，这两个独点集 $\{x_1\}$ 和 $\{x_2\}$ 都是闭集.
- 由 T4，有 Urysohn 引理. 存在连续函数 $f : X \to [0, 1]$ 使得

$$x_1 \in f^{-1}(0), \quad x_2 \in f^{-1}(1).$$

- 由 X 连通，$f(X) = [0, 1]$，从而 f 为满射，从而 X 不可数.

(b) Yes, we can! 假设 X 是可数的，那么 X 自然是 Lindelöf 的，但 Lindelöf+T3$\Longrightarrow$T4!

(c) (i)
- 因为 1 和任意正整数互素，所以对任意的 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，$n \in D_{n,1} \subset \mathbb{N}_{>0}$.
- 设 $e \in D_{a,b} \cap D_{c,d}$，断言 $e \in D_{e,f} \subset D_{a,b} \cap D_{c,d}$，其中 $f = \mathrm{lcm}(b, d)$.
  - 首先验证 $\gcd(e, f) = 1$. 设 p 是 e 和 f 的公因子. 对 f 作素因子分解，易知 $p \mid f \Longrightarrow p \mid b$ 或 $p \mid d$，不妨设 $p \mid b$. 又 $p \mid e$，从而 $p \mid a$. 但 $\gcd(a, b) = 1$，所以 $p = \pm 1$.
  - 包含关系 $D_{e,f} \subset D_{a,b} \cap D_{c,d}$ 显然.

(ii)
- 任取 $a \neq c \in \mathbb{N}_{>0}$. 我要找 $b, d \in \mathbb{N}_{>0}$ 满足
  - $\gcd(a, b) = 1$.
  - $\gcd(c, d) = 1$.
  - $\gcd(b, d) \nmid |a - c|$.
- 首先断言，如果我能找到这样的 b, d，则 $D_{a,b} \cap D_{c,d} = \varnothing$.
  假设 $a + bk = c + dl$，不妨设 $a > c$，那么 $a - c = dl - bk$. 从而 $a - c \in (e)$，其中 $e = \gcd(b, d)$，(e) 是由 e 生成的主理想，但这与 $e \nmid a - c$ 矛盾！
- 接着证明 b, d 的存在性. 由于素数有无限多个，可以找到一个素数 p 不是 $a, c, |a - c|$ 的素因子，令 $b = d = p$ 即满足上述三条.

(iii)
- 连通. 任取 $D_{a,b}$ 和 $D_{c,d}$，断言 $bd \in \overline{D_{a,b}} \cap \overline{D_{c,d}}$，从而 X 是连通的.
  下证断言，任取 $D_{bd,e}$，由 $\gcd(bd,e)=1$ 知 $\gcd(e,b)=1$. 由中国剩余定理，$D_{bd,e} \cap D_{a,b} \neq \varnothing$，从而 $bd \in \overline{D_{a,b}}$. 同理可证 $bd \in \overline{D_{c,d}}$.
- 不 T3，否则与 $\mathbb{N}_{>0}$ 只有可数多个点矛盾.
- 不紧，否则紧 +T2$\Longrightarrow$T3.
- 不可度量化，否则 T4，这与 $\mathbb{N}_{>0}$ 只有可数多个点矛盾.

(iv) 所有素数构成的集合 P 在 $(\mathbb{N}_{>0}, \mathscr{T}_{Golomb})$ 中是稠密的.

□

(3)[Connected components]
Let X be a topological space. The *connected component* containing $x \in X$ is defined to be the maximal connected subsets of X containing x. By Proposition 2.9, it is easy to see that the connected component containing x is the union of all connected subsets of X that contains x.

(a) Prove: Each connected component is a closed subset.

(b) Give an example showing that the connected component need not be open.

(c) [Extension of Generalized Intermediate Value Theorem] Prove: If $f: X \to Y$ is continuous, then for any subset A of X, the cardinality of connected componnets of $f(A)$ is no more than the cardinality of connected components of A.

(d) Let $E \subset \mathbb{R}^n$ be a vector subspace. How many connected components does $\mathbb{R}^n \backslash E$ have?

(e) Regard $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ as a subspace of $\mathbb{R}^{n^2}$. How many connected components does $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ have? What if we replace $\mathbb{R}$ by $\mathbb{C}$?

证明.

(a) 设 A 是一个连通分支，$x \in A'$，那么 $A \subset A \cup \{x\} \subset \overline{A}$. 按定义 $x \in A$.

(b) $\mathbb{Q}$，它的连通分支是独点集.

(c) A 的每个连通分支的像都一定被包含在 $f(A)$ 的某个连通分支中，显然有从 A 的连通分支到 $f(A)$ 的连通分支的一个满射.

(d)
- 当 $\dim E = n$，0 个.
- 当 $\dim E = n-1$，2 个.
- 当 $\dim E < n-1$，1 个.

(e)
- $\mathbb{R}$，2 个.
- $\mathbb{C}$，1 个.
- 证明的方法千千万，可惜我一种也不会.

□

(4)[Locally connectedness]
We say a topological space X is *locally connected* if for any $x \in X$ and any open neighborhood U of x, there exists a connected open neighborhood V of x such that $V \subset U$.

(a) Give examples:

 (i) both connected and locally connected.

 (ii) connected but not locally connected.

 (iii) locally connected but not connected.

 (iv) neither connected nor locally connected.

(b) Prove: If X is locally connected, then any connected component is open.

(c) Prove: If X is compact and locally connected, then X has finitely many connected components. Can we remove the locally connectedness condition?

(d) Suppose X is locally connected, $f : X \to Y$ is continuous and open. Prove: $f(X)$ is locally connected.

证明.

(a) (i) $\mathbb{R}$.

 (ii) 拓扑学家的正弦曲线.

 (iii) $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

 (iv) 拓扑学家的正弦曲线并上一个独点集.

(b) 设 A 是一个连通分支. 任取 $x \in A$，由于 X 是 x 的一个开邻域，按局部连通定义存在 x 的连通开邻域 U，按连通分支定义 $U \subset A$. 从而 A 是开集.

(c)
- 由 X 局部连通，每个连通分支都是开集. 取所有的连通分支构成 X 的一个开覆盖，由 X 紧存在有限子覆盖. 注意到连通分支两两不交，因此只能有有限个连通分支.
- 不能. 反例：$\mathbb{Q}$ 的单点紧化.

(d) 任取 $x \in X$，设 V 是 $f(x)$ 的一个开邻域. 由 f 连续，存在 x 的一个开邻域 U，使得 $f(U) \subset V$. 由 X 局部连通，存在 x 的一个连通开邻域 $W \subset U$，$f(W) \subset f(U) \subset V$. 由 f 是连续开映射，$f(W)$ 是 $f(x)$ 的连通开邻域，命题得证.

□

Chapter 2

道路和道路连通

1 道路和道路连通

1.1 道路

我们现在转向一个密切相关的概念：道路连通性. 它更符合直觉，并且，正如我们将要看到的，能被用来定义能被代数对象计算的“更高级别的连通性”.

定义 1.1. 设 X 是一个拓扑空间，$x, y \in X$.

(1) 从 x 到 y 的一套道路是一个连续映射 $\gamma : [0,1] \to X$ 使得 $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

(2) 当 $x = y$，我们称该路径是以 x 为基点的圈.

(3) 有一个从 x 到 x 的特殊的圈：常值路径 γ_x，定义为 $\gamma_x(t) = x, \forall t \in [0,1]$.

道路空间和圈空间的记号：

$$\Omega(X; x_0, x_1) = \left\{\gamma \in \mathcal{C}([0,1].X) \middle| \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\right\}.$$

$$\Omega(X; x_0) = \left\{\gamma \in \mathcal{C}([0,1],X) \middle| \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\right\}.$$

注记. 道路是一个连续映射，而不仅仅是一条“几何曲线”. 换句话说，同一条“几何曲线”的不同参数化应该被视为不同的道路.

对于道路可以定义一些“代数运算”：

定义 1.2. 设 X 是拓扑空间.

(1) 给定从 x 到 y 的任意道路 γ，我们能够“反向”这条道路来得到从 y 到 x 的一条新的道路 $\bar{\gamma}$ 通过定义 $\bar{\gamma(t)} = \gamma(1-t)$.$\bar{\gamma}$ 是连续的因为他是两个连续映射 γ 和映射 $t \mapsto 1-t$ 的符合.

(2) 给定两条道路，从 x 到 y 的 γ_1，从 y 到 z 的 γ_2，我们能“连接”两条道路来得到从 x 到 z 的新道路 $\gamma_1 * \gamma_2$ 通过定义

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

遗憾的是这些运算不是那么“代数”. 例如 $\gamma * \bar{\gamma}$ 与 $\bar{\gamma} * \gamma$ 是不同的，因为前者是从 x 到 x 的道路而后者是从 y 到 y 的道路. 即使在 $x = y$ 的情形，他们依旧是不同的道路因为他们是以相反的顺序行进的两个圈. 此外我们还希望常值道路 γ_x 表现得像“恒等元素”一样，但它并不. 我们将展示如何解决这个问题并在下次发展一个正确的“道路的代数”.

1.2 道路连通性

定义 1.3. *我们称 X 是道路连通的，如果 X 中任意两点能够被道路连接起来.*

容易证明道路连通强于连通：

命题 1.4. *如果 X 是道路连通的，那么 X 是连通的.*

证明. 用反证法. 假设存在非空不交开集 A 和 B 使得 $X = A \cup B$. 取 $x \in A$ 和 $y \in B$ 和一条从 x 到 y 的道路. 那么 $[0,1] = \gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B)$ 是非空无交开集的并，这与 $[0,1]$ 的连通性矛盾. □

我们给出一些例子：

例 1.5. *任意连通开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是道路连通的.*

证明. 固定任一点 $x \in U$，考虑集合 $A = \{y \in U | \text{存在}x\text{到}y\text{的道路}\}$. 容易证明 A 既开又闭非空，由 U 的连通性，$U = A$. 所以 U 中的任一点可以由道路连接到 x，从而 U 中任意两点有道路连接. □

通过相同的论证我们能够证明：

推论 1.6. *拓扑流形是道路连通的当且仅当它是连通的.*

例 1.7. *$\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q}^2$ 是道路连通的.*

例 1.8. *拓扑学家的正弦曲线是连通的，但不是道路连通的.*

证明. 如果 $(0,0)$ 点想由道路连到 $(1,0)$ 点，这条道路必须包含所有的 $\sin\dfrac{1}{x}$ 部分，注定不连续. □

从这个例子中我们能够看到一般地，

- 连通空间不一定是道路连通的.
- 道路连通集合的闭包不一定是道路连通的.

1.3 局部道路连通

如果你仔细思考上面的例子，你会发现在任意“坏点”比如 $(0,0)$ 附近，在任意小的邻域中，你能找到无穷多条不连通的“垂直曲线”. 换句话说，在这些坏点附近，空间不是道路连通的.

定义 1.9. *我们称拓扑空间 X*

(1) *在 x 处道路连通，如果对 x 的任意开邻域 U，存在 x 的道路连通开邻域 V，满足 $V \subset U$.*

(2) *局部道路连通，如果它处处局部道路连通.*

例如，$\mathbb{R}^n$（或更一般地，拓扑流形或局部欧几里得空间）中的任意开集是局部道路连通的.

注意到一个道路连通空间可能不是局部道路连通的，比如向拓扑学家的正弦曲线中添加一条线.

为什么道路连通不能够被定义为存在一个邻域道路连通呢？考虑这样的例子，0 和 $\frac{1}{n}$，0 和每个点都用一个马蹄形连接起来，存在一个足够大的邻域使得它道路连通，但如果邻域小到不能把道路包含进去就不行了.

事实表明任意没有坏点的连通拓扑空间是道路连通的，证明与证明欧氏空间中连通开集的道路连通性是相同的：

命题 1.10. 如果 X 是连通的且局部道路连通的，那么 X 是道路连通的.

1.4 道路连通的有关结果

上次我们证明了连通性在连续映射下、在有交并下、在乘积下保持不变. 这些性质对道路连通性也成立，并且证明更加简单：

命题 1.11. 设 $f: X \to Y$ 是连续映射. 那么对于任意道路连通子集 $A \subset X$，$f(A)$ 也是道路连通的.

命题 1.12. 设 X_α 道路连通且 $\bigcap_\alpha U_\alpha \neq \varnothing$，那么 $\bigcup_\alpha U_\alpha$ 是道路连通的.

命题 1.13. 如果每个 X_α 是道路连通的，那么 $\prod_\alpha X_\alpha$ 也是道路连通的.

1.5 连通分支和道路连通分支

对任意的拓扑空间 X，我们能够定义两个关系，

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists \text{连通子集} A \subset X \text{ s.t. } x, y \in A,$$
$$x \overset{p}{\sim} y \Longleftrightarrow \exists X \text{中的一条道路连接} x \text{和} y$$

不难验证 $\sim$ 和 $\overset{p}{\sim}$ 都是等价关系.

定义 1.14. 设 X 是拓扑空间.

(1) $\sim$ 的每个等价类称作 X 的一个连通分支.

(2) $\overset{p}{\sim}$ 的每个等价类称作 X 的一个道路连通分支.

注意到按定义，每个连通分支对应于 X 的一个极大连通子集，每个道路连通分支对应于 X 的一个极大道路连通子集.

我们已经在 PSet9-1-3 中看到 X 的任意连通分支是闭集. 但是，从拓扑学家的正弦曲线我们看到一个道路连通分支不必是闭的或开的. 另一方面，在 PSet9-1-4 中我们看到如果 X 是局部连通的，那么任意连通分支还是开的. 类似地，容易看到如果 X 是局部道路连通的，那么每个道路连通分支是开的（局部道路连通时连通与道路连通是一回事，从而是既开又闭的）.

1.6 分支空间

根据 Lec6，拓扑空间上的每个等价关系都定义了一个商映射和商空间. 因此我们得到了两个商空间

$$\pi_c(X) = X/\sim \quad 和 \quad \pi_0(X) = X/\overset{p}{\sim}.$$

注意到如果 X 是完全不连通的，那么每个等价类只包含一个元素，因此 $\pi_c(X)$ 就是 X 自己. 特别地，$X/\sim$ 也是完全不连通的. 事实表明相同的结果对任意的拓扑空间 X 成立：

命题 1.15. 商空间 $\pi_c(X)$ 是完全不连通的.

1.7 迂回：范畴之间的函子

回忆在 Lec7 中我们提到了范畴的概念：一个范畴由对象 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和对象之间的态射 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \left\{\mathrm{Mor}(X,Y)\middle|X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\right\}$ 组成. 给定两个范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，我们能用一类叫做函子的映射将它们联系起来.

定义 1.16. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是函子. 一个从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的（协变）函子 F 是一个映射满足

(1) 对每个对象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 指定一个对象 $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，

(2) 对每个 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ 指定一个 $\mathcal{D}$ 中的态射 $F(f) \in \mathrm{Mor}(F(X),F(Y))$，满足

- $F(\mathrm{Id}_X) = Id_{F(X)}$ 对任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 成立.
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ 对所有 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ 和 $g \in \mathrm{Mor}(Y,Z)$ 成立.

例如，

例 1.17. 设 $\mathcal{TOP}$ 是拓扑空间范畴，即

- 对象是拓扑空间，
- 态射是拓扑空间之间的连续映射.

设 $\mathcal{SET}$ 是集合范畴，即

- 对象是集合，
- 态射是关系.

那么我们可以定义一个“遗忘函子”，将每个拓扑空间映到它的底集，将每个连续映射映到它的图象.

类似地我们可以设 $\mathcal{ALG}$ 是（结合）代数范畴，即

- 对象是（结合）代数，
- 态射是代数同态.

那么我们可以定义一个从 $\mathcal{TOP}$ 到 $\mathcal{ALG}$ 的反变函子对每个拓扑空间指定其上的实值连续函数全体 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$，对每个连续映射 $f : X \to Y$ 指定代数同态 $\mathcal{C}(f) : \mathcal{C}(Y,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$，其中 $\mathcal{C}(f)(\varphi) := \varphi \circ f$.

1.8 函子 π_c 和 π_0

现在假设我们有一个拓扑空间之间的连续映射 $f : X \to Y$. 根据广义介值定理，f 将 X 的每个连通分支映到 Y 的一个连通分支. 因此我们得到一个映射

$$\pi_c(f) : X/\sim \to Y/\sim, \quad [x] \mapsto [f(x)].$$

事实表明 π_c 由如下良好的性质：

命题 1.18. $\pi_c(f)$ 关于商拓扑是连续的. 此外，$\pi_c(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{X/\sim}$，$\pi_c(g \circ f) = \pi_c(g) \circ \pi_c(f)$.

换句话说，π_c 是从拓扑空间范畴 $\mathcal{TOP}$ 到完全不连通拓扑空间范畴 $\mathcal{TOP}_{totdis}$ 的一个函子.

证明.

- 任取 $Y/\sim$ 中的一个开集 U,按定义,$\pi_Y^{-1}(U)$ 是 Y 中开集. 由 f 的连续性,$f^{-1}(\pi_Y^{-1}(U))$ 是 X 中开集.$\pi_Y^{-1}(U)$ 是 Y 中连通分支的并,$f^{-1}(\pi_Y^{-1}(U))$ 是 X 中连通分支的并,所以 $\pi_X^{-1}(\pi_X(f^{-1}(\pi_Y^{-1}(U)))) = f^{-1}(\pi_Y^{-1}(U))$，按定义 $\pi_X(f^{-1}(\pi_Y^{-1}(U)))$ 是 $X/\sim$ 中开集，从而 f 是连续映射.
- $\pi_c(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{X/\sim}$ 显然.
- $\pi_c(g \circ f)([x]) = [(g \circ f)(x)]$，$\pi_c(g) \circ \pi_c(f)([x]) = \pi_c(g)([f(x)]) = [g(f(x))] = [(g \circ f)(x)]$.

$\square$

2 连续形变作为道路

2.1 连续形变作为连续映射的连续族

在 Lec1 中我们已经通过图片看到了“连续形变”在拓扑中的重要性，但没有给出一个精确的定义. 有了点集拓扑学，我们总能够在我们在抽象的集合中讨论“连续”的对象时给出一个精确的定义：

抽象拓扑空间中对象 a 的连续形变是指一个连续映射 $f:[0,1]\to X$ 满足 $f(0)=a$，根据具体问题可能还有其他额外的限制.

例如，给定空间 X 中从 x_0 到 x_1 的道路 γ，保持端点不动的路径 γ 的一个连续形变是一个连续映射

$$F:[0,1]\to\Omega(X;x_0,x_1)=\left\{\gamma\in\mathcal{C}([0,1],X)\middle|\gamma(0)=x_0,\gamma(1)=x_1\right\}$$

满足 $F(0)=\gamma,F(t)(0)=x_0,F(t)(1)=x_1$.

等一等！我们还没有明确在道路空间 $\Omega(X;x_0,x_1)$ 上的拓扑. 没有拓扑，讨论 F 的连续性就没有意义.

幸运的是 $\Omega(X;x_0,x_1)$ 是 $\mathcal{C}([0,1],X)$ 的一个子空间，在后者上我们已经有了几个拓扑. 在 X 是一个拓扑空间的一般情形，从收敛的角度来看，$\mathcal{C}([0,1],X)$ 上的最好的拓扑应该是紧开拓扑.

更一般地，考虑映射 $f\in\mathcal{C}(X,Y)$，其中 X 和 Y 都是拓扑空间.f 依赖于参数空间 T 的一个连续形变是一个连续映射

$$F:T\to\mathcal{C}(X,Y),\quad t\mapsto F(t)=f_t\in\mathcal{C}(X,Y)$$

满足 $f_{t_0}=f$ 对于某个 $t_0\in T$ 成立，其中 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的拓扑是紧开拓扑. 按定义，该拓扑由子基

$$\mathcal{S}_{c.o.}=\left\{S(K,U)\middle|K\subset X\text{ is compact and }U\subset Y\text{ is open}\right\},$$

生成，其中 $S(K,U)=\left\{f\in\mathcal{C}(X,Y)\middle|f(K)\subset U\right\}$.

2.2 连续形变作为一个连续映射

3 PSet09-2

(1)[π_0 and π_c as Functors]
Prove Proposition 1.19 and Proposition 1.20.

命题 3.1. $\pi_c(f)$ 关于商拓扑是连续的. 此外，$\pi_c(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{X/\sim}$，$\pi_c(g \circ f) = \pi_c(g) \circ \pi_c(f)$.

证明.

- 任取 $Y/\sim$ 中的一个开集 U,按定义,$\pi_Y^{-1}(U)$ 是 Y 中开集. 由 f 的连续性,$f^{-1}(\pi_Y^{-1}(U))$ 是 X 中开集.$\pi_Y^{-1}(U)$ 是 Y 中连通分支的并,$f^{-1}(\pi_Y^{-1}(U))$ 是 X 中连通分支的并,所以 $\pi_X^{-1}(\pi_X(f^{-1}(\pi_Y^{-1}(U)))) = f^{-1}(\pi_Y^{-1}(U))$，按定义 $\pi_X(f^{-1}(\pi_Y^{-1}(U)))$ 是 $X/\sim$ 中开集，从而 f 是连续映射.
- $\pi_c(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{X/\sim}$ 显然.
- $\pi_c(g \circ f)([x]) = [(g \circ f)(x)]$，$\pi_c(g) \circ \pi_c(f)([x]) = \pi_c(g)([f(x)]) = [g(f(x))] = [(g \circ f)(x)]$.

□

命题 3.2. $\pi_0(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{X/\overset{p}{\sim}}$，$\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$.

证明. 类似可证. □

(2)[Components and path componnets:Examples]
Find the components and path components for the following spaces:

(a) The Sorgenfrey line.

(b) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$.

(c) $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{uniform})$.

证明. □

(3)[Divisible properties] We say a topological property (P) is a *divisible property* if X satisfies (P), Y is a quotient of $X \Longrightarrow Y$ satisfies (P).

(a) Prove: compactness,connectedness,path-connectedness are divisible.

(b) Is (T1),(T2),(T3),(T4) divisible? Is “locally compact” divisible?

(c) Is (A1),(A2) divisible? Is separable,Lindelof divisible?

证明.

(a) 因为商映射是连续映射，而紧性、连通性、道路连通性在连续映射下都是保持的.

(b)
- T1,T2 不是可除的. 考虑拓扑学家的正弦曲线，它是 T2 空间 $\mathbb{R}^2$ 的子集从而是 T2 进而是 T1 的，但它在等价关系 $\overset{p}{\sim}$ 下的商空间的商拓扑 $\mathscr{T}_{quotient} = \{\varnothing, s, \{v, s\}\}$ 既不是 T1 也不是 T2 的.

(c)
-

- 因为商映射是连续映射，而可分，Lindelöf 在连续映射下都是保持的.

□

(4)[Components of topological groups]
Let G be a topological group.

(a) Prove: For any normal subgroup N of G, the quotient group G/N is a topological group.

(b) Prove: $\pi_0(G), \pi_c(G)$ are both topological groups. What's the relation between these two groups?

(c) Are $\pi_0(G)$ and $\pi_c(G)$ Hausdorff spaces?

(d) Find the relations between $\pi_0(G_1 \times G_2)$ and $\pi_0(G_1), \pi_0(G_2)$, where G_1, G_2 are topological groups.

证明.

(a)
- $\tilde{f} : G/N \times G/N \to G/N$ 是连续映射. 任取 G/N 中的开集 U，按定义，$\pi^{-1}(U)$ 是 G 中开集，因为群乘法 $f : G \times G \to G$ 是连续映射，所以 $f^{-1}(\pi^{-1}(U))$ 是 $G \times G$ 中开集.
- 证一下陪集是开集.

(b)

(c)

(d)

□

Chapter 3

同伦和道路同伦

1 映射的同伦

1.1 映射的同伦

定义 1.1. 设 X 和 Y 是拓扑空间. 称 $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(X,Y)$ 是同伦的如果存在连续映射

$$F : [0,1] \times X \to Y$$

使得 $F(0,x) = f_0(x)$ 且 $F(1,x) = f_1(x)$ 对任意 $x \in X$ 成立. 这样的 F 称作 f_0 和 f_1 之间的一个同伦. 如果 f_0 同伦于 f_1，记作 $f_0 \sim f_1$.

容易验证同伦给出了 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的一个等价关系.

对于 $f \in \mathcal{C}(X,Y)$,将 f 的同伦等价类记作 $[f]$,并且记同伦等价类的全体为 $[X,Y] = \mathcal{C}(X,Y)/\sim$.

如果 $X = \{pt\}$ 是单点集，那么连续映射 $f : X \to Y$ 就仅仅是 Y 中的一个点. 在这种情形下“两个连续映射 f_0, f_1 是同伦的”就等价于“Y 中的两个点能够被道路连接起来”. 此时 $[\{pt\}, Y] = \pi_0(Y)$. 因此同伦类是道路连通分支的推广.

1.2 关于映射同伦类的运算

考虑 $\mathcal{C}(X,Y)$ 和 $[X,Y]$ 而不是拓扑空间 X, Y 本身的好处是我们有许多自然的运算：

(1) 复合 $[X,Y] \times [Y,Z] \longrightarrow [X,Z], ([f],[g]) \longmapsto [g \circ f]$.

(2) 拉回 $F : X_0 \longrightarrow X_1 \rightsquigarrow F^* : [X_1,Y] \longrightarrow [X_0,Y], [f] \longmapsto [f \circ F]$.

(3) 推出 $F : Y_0 \longrightarrow Y_1 \rightsquigarrow F_* : [X,Y_0] \longrightarrow [X,Y_1], [f] \longmapsto [F \circ f]$.

良定性留作练习.

1.3 零伦

最简单的连续映射是常值映射，即，将 X 中的所有点映到 Y 中的单点的映射.

定义 1.2. 称 $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ 是零伦的如果它同伦于常值映射.

例 1.3. 设 $X = Y = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. 设 $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$ 是映射

$$f_n(z) = z^n.$$

我们将看到所有这些 f_n 彼此不同伦，特别地，当 $n \neq 0$ 时 f_n 不是零伦的. 此外，容易看到 $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ 的任意连续映射都同伦于某个 f_n.

例 1.4. 设 $Y \subset \mathbb{R}^n$ 是凸的，或更一般地，星凸的，那么对于任意 X，

- 任意映射 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ 是零伦的.

1.4 可缩空间

定义 1.5. 称拓扑空间 X 是可缩的，如果恒等映射 Id_X 是零伦的.

命题 1.6. 设 X 是可缩空间，Y 是任意拓扑空间，那么任意映射 $f : Y \to X$ 是零伦的.

证明. 因为 X 是可缩空间，按定义，存在连续映射 $G : [0, 1] \times X \to X$ 和 $x_0 \in X$ 满足

$$G(0, x) = x, \quad G(1, x) = x_0.$$

那么容易验证

$$F : [0, 1] \times Y \to X \quad (t, y) \mapsto G(t, f(y))$$

是 $f : Y \to X$ 到常值映射 $g : Y \to X, y \mapsto x_0$ 的同伦. $\square$

例 1.7. $\mathbb{S}^{n-1}$ 不是可缩的.

事实上，我们能够证明（留作练习）：$\mathbb{S}^{n-1}$ 是可缩的当且仅当存在一个收缩映射 $f : \overline{B^n} \to \mathbb{S}^{\ltimes-\nVdash}$. 事实上这样的 f 并不存在（这等价于 Brouwer 不动点定理，见练习）.

注意到 $\mathbb{S}^{n-1}$ 能够被嵌入到可缩空间 $\overline{B^n}$ 中，而后者可以视作前者的锥空间. 事实上（留作练习）任意拓扑空间都可以被嵌入到某个可缩空间中，即，它的锥空间.

2 道路同伦

2.1 关于道路的运算

现在我们聚焦在 X 中的道路之间的同伦. 回忆 X 中的道路是一个连续映射 $\gamma:[0,1]\to X$，而不是作为 X 的子集的 γ 的像. 在所有道路的空间中，我们已经定义了三个“代数运算”

- 对任意 $x\in X$ 存在常值道路
$$\gamma_x(s)=x,\quad \forall\ t\in[0,1].$$
- 给定任意从 x 到 y 的道路 γ，我们能够使道路反向得到
$$\bar{\gamma}(s):=\gamma(1-s).$$
- 给定两条道路，从 x 到 y 的 γ_1 和从 y 到 z 的 γ_2，我们能够连接两条道路得到
$$\gamma_1*\gamma_2(s)=\begin{cases}\gamma_1(2t), & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2},\\ \gamma_2(2t-1), & \dfrac{1}{2}<t\leqslant 1.\end{cases}$$

不幸的是这些运算没有我们想要的那么代数. 例如，我们希望 $*$ 运算表现得像乘法，而常值道路作为幺元，反向道路作为逆. 不幸的是，这些预期的性质都不成立：

-
-
-

但是，情况也没有那么糟糕.

2.2 重新参数化下的同伦不变性

定义 2.1. 我们称道路 $\gamma_2\colon[0,1]\to X$ 是道路 $\gamma_1\colon[0,1]\to X$ 的重新参数化，如果存在一个连续映射 $f\colon[0,1]\to[0,1]$ 满足 $f(0)=0$ 和 $f(1)=1$ 使得 $\gamma_2=\gamma_1\circ f$.

容易验证 $\gamma_1*(\gamma_2*\gamma_3)$ 与 $(\gamma_1*\gamma_2)*\gamma_3$ 互为重新参数化；$\gamma_{x_1}*\gamma$ 是 γ 的重新参数化，虽然 γ 不是 $\gamma_{x_1}*\gamma$ 的重新参数化.

命题 2.2. 设 $\gamma_2=\gamma_1\circ f$ 是 γ_1 的一个重新参数化，那么 $\gamma_2\sim\gamma_1$.

2.3 同伦在代数运算下不变

推论 2.3. $(\gamma_1*\gamma_2)*\gamma_3\sim$

2.4 道路同伦

上面的这些良好性质让我们想把道路之间的运算定义到道路的同伦类之间的运算，但仍存在一些问题.

2.5 关于道路同伦类的运算

现在我们已经准备好在道路同伦类上定义代数运算：

(1) 乘法：

$$m:\pi(X;x_1,x_2)\times\pi(X;x_2,x_3)\to\pi(X;x_1,x_3)$$
$$([\gamma_1]_p,[\gamma_2]_p)\mapsto[\gamma_1]_p*[\gamma_2]_p:=[\gamma_1*\gamma_2]_p,$$

(2) 求逆：

$$i:\pi(X;x_1,x_2)\to\pi(X;x_2,x_1),\quad [\gamma]_p\mapsto[\gamma]_p^{-1}:=[\bar{\gamma}]_p.$$

下面的命题几乎是直接的：

命题 2.4.

(1) *运算 m 和 i 是良好定义的.*

(2) *乘法是结合的：如果 $[\gamma_i]_p\in\pi(X;x_i,x_{i+1}), i=1,2,3$，那么*

$$([\gamma])$$

(3)

(4)

(5)

3 PSet09-3

(1)[The Cone]

At the end of Lecture 4 we defined the cone $C(X)$ over any space X:

$$C(X) = X \times [0,1]/X \times \{0\}\,.$$

Note that we can embed X into $C(X)$ by

$$\iota : X \to C(X), x \mapsto [(x,1)].$$

(a) Prove: For any $X, C(X)$ is contractible.

(b) Let Y be any topological space, and $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ be a continuous map. Prove: f is null-homotopoc if and only if there exists a continuous map $\hat{f} : C(X) \to Y$ such that $\hat{f} \circ \iota = f$.

(2)[Maps to $\mathbb{S}^n$]

(a) Porve: Any non-surjective continuous map $f : X \to \mathbb{S}^n$ is null-homopotic.

(b) Let $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ be continuous maps. Suppose they are never anti-podal,i.e. $g(x) \neq -f(x)$ holds for all x. Prove: f is homotopic to g.

证明.

(a) 因为 f 不是满射，存在 $s_0 \in \mathbb{S}^n \notin f(X)$. 因此可考虑 $\tilde{f} : X \to \mathbb{S}^n \backslash \{s_0\} \simeq \mathbb{R}^n$.

(b) 设 $F(t,x) = \dfrac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}$

- 良定性. 假设存在 t_0 和 x_0 使得 $(1-t_0)f(x_0) + t_0 g(x_0) = 0$，即 $(1-t_0)f(x_0) = -t_0 g(x_0)$，两边取模长得 $t_0 = \dfrac{1}{2}$. 则 $f(x_0) + g(x_0) = 0$，与条件矛盾.
- 容易看出 $\|F(t,x)\| = 1$，$F(0,x) = f(x)$，$F(1,x) = g(x)$.
- 下面说明 $F(t,x)$ 是连续映射.

□

(3)[Relative homotopy]

Let X, Y be topological spaces, and $A \subset X$. Let $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X,Y)$ be continuous maps such that $f_1 = f_2$ on A. We say f_1, f_2 are homotopic relative to A, denote as $f_1 \overset{A}{\sim} f_2$, if there exists a continuous map $F : [0,1] \times X \to Y$ such that

$$\begin{aligned} &F(0,x) = f_1(x), \quad F(1,x) = f_2(x), \quad \forall x \in X \\ &F(t,x) = f_1(x), \quad \forall x \in A. \end{aligned}$$

(a) Prove: Relative homotopy is an equivalence relation.

(b) Let X, Y, Z be topological spaces, and $A \subset X, f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X,Y)$ and $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(Y,Z)$. Prove: If $f_1 \overset{A}{\sim} f_2$ and $g_1 \overset{f_1(A)}{\sim} g_2$, then $g \circ f \overset{A}{\sim} g_2 \circ f_2$.

(c) Also define "pull-back" and "push-forward" for relative homotopy classes, and check the well-definedness.

证明.

(a)
- $f(x) \overset{A}{\sim} f(x)$. 取 $F(t,x) = f(x)$
- $f_1(x) \overset{A}{\sim} f_2(x) \Longrightarrow f_2(x) \overset{A}{\sim} f_1(x)$. 取 $F'(t,x) = F(1-t,x)$.
- $f_1(x) \overset{A}{\sim} f_2(x), f_2(x) \overset{A}{\sim} f_3(x) \Longrightarrow f_1(x) \overset{A}{\sim} f_3(x)$. 取 $F'(t,x) = \begin{cases} F_1(2t,x), 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \\ F_2(2t-1,x), \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1 \end{cases}$

(b) 取 $H(t,x) = G(t, F(t,x))$.

(c)
- 拉回. 给定 $F : Z \to X$，诱导拉回映射

$$F^* : [X,Y]_A \to [Z,Y]_{F^{-1}(A)}, [f]_A \mapsto [f \circ F]_{F^{-1}(A)}.$$

要验证良定性，即证若 $f_0 \overset{A}{\sim} f_1$，则 $f_0 \circ F \overset{F^{-1}(A)}{\sim} f_1 \circ F$. 设 f_0 与 f_1 之间相对 A 的同伦映射为 $G(t,x)$. 定义 $H(t,z) = G(t,F(z))$. 则

  - $H(0,z) = G(0,F(z)) = (f_0 \circ F)(z)$.
  - $H(1,z) = G(1,F(z)) = (f_1 \circ F)(z)$.
  - 任取 $z \in F^{-1}(A)$，任取 $t \in [0,1]$，$H(t,z) = G(t,F(z)) = f_1 \circ F(z)$.

- 推出. 给定 $F : Y \to Z$，诱导推出映射

$$F^* : [X,Y]_A \to [X,Z]_A, [f]_A \mapsto [F \circ f]_A.$$

要验证良定性，即证若 $f_0 \overset{A}{\sim} f_1$，则 $F \circ f_0 \overset{A}{\sim} F \circ f_1$. 设 f_0 与 f_1 之间相对 A 的同伦映射为 $G(t,x)$. 定义 $H(t,x) = F(G(t,x))$. 则

  - $H(0,x) = F(G(0,x)) = (F \circ f_0)(x)$.
  - $H(1,x) = F(G(1,x)) = (F \circ f_1)(x)$.
  - 任取 $x \in A$，任取 $t \in [0,1]$，$H(t,x) = F(G(t,x)) = F \circ f_1(x)$.

□

(4)[$\mathbb{S}^{n-1}$ is not contractible]

(a) Prove: $\mathbb{S}^{n-1}$ is contractible if and only if there exists a retraction $f : \overline{B^n} \to \mathbb{S}^{n-1}$.

(b) Suppose there exists no retraction $f : B^n \to \mathbb{S}^{n-1}$. Prove that Brouwer's fixed point theorem is true,i.e. any continuous map $f : B^n \to B^n$ has a fixed point.

(c) Suppose Brouwer's fixed point theorem is true.Prove: there exists no retraction $f : B^n \to \mathbb{S}^{n-1}$.

证明.

(a)
- $\Longleftarrow$

$$G : [0,1] \times \overline{B^n} \xrightarrow{F} \overline{B^n} \xrightarrow{f} S^{n-1}.$$

其中 $F(0,x) = x$，$F(1,x) = (0, \cdots, 0, 1)$. 则 $G\big|_{[0,1]\times S^{n-1}}$ 是 Id 到常值映射之间的同伦.

- $\Longrightarrow$ 因为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 可缩,存在 $F:[0,1]\times\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{S}^{n-1}$ 满足 $F(0,x)=(0,\cdots,0,1)$,$F(1,x)=x$,那么 $f(x)=F(|x|,x):\overline{B^n}\to\mathbb{S}^{n-1}$ 便是收缩映射.

(b)

(c) 假设存在收缩映射 $f:\overline{B^n}\to\mathbb{S}^{n-1}$，那么

$\square$

Chapter 4

基本群

1 基本群

1.1 基本群：定义

一般来说 X 中道路的道路同伦等价类的全体 $\pi(X)$ 和 X 中以 x_0 为起点以 y_0 为终点的道路的道路同伦等价类全体 $\pi(X;x_0,y_0)$ 都不是群. 但是，如果 $x_0=y_0$，那么

$$\pi_1(X,x_0):=\pi(X;x_0,x_0)$$

是一个群，因为

- 我们能够将任意两个元素 $[\gamma_1]_p,[\gamma_2]_p\in\pi_1(X,x_0)$ 乘起来得到
$$[\gamma_1]_p\cdot[\gamma_2]_p:=[\gamma_1*\gamma_2]_p\in\pi_1(X,x_0).$$
- 我们有恒等元 $e=[c_{x_0}]_p\in\pi_1(X,x_0)$ 使得对任意 $[\gamma]_p\in\pi_1(X,x_0)$，
$$[\gamma]_p\cdot[c_{x_0}]_p=[\gamma]_p=[c_{x_0}]_p\cdot[\gamma]_p.$$
- 任意 $[\gamma_1]_p\in\pi(X,x_0)$ 可逆，其逆为 $[\gamma]_p^{-1}:=[\bar{\gamma}]_p\in\pi_1(X,x_0)$，
$$[\gamma]_p^{-1}\cdot[\gamma_p]=[\gamma_{x_0}]_p=[\gamma]_p\cdot[\gamma]_p^{-1}.$$

所以

命题 1.1. *$\pi_1(X,x_0)=\Omega(X,x_0)/\underset{p}{\sim}$ 构成群，群乘法为*

$$[\gamma_1]_p\cdot[\gamma_2]_p=[\gamma_1*\gamma_2]_p,\quad\forall\gamma_1,\gamma_2\in\Omega(X,x_0),$$

求逆运算为

$$[\gamma]_p^{-1}=[\bar{\gamma}]_p,\quad\forall\gamma\in\Omega(X,x_0).$$

定义 1.2. *我们称 $\pi_1(X,x_0)$ 是以 x_0 为基点的基本群*[1].

[1]基本群的概念最先由 H.Poincaré 在 1895 年在他的论文“位置分析”中引入. 他后来在 1899 到 1904 年之间发表了五篇补充. 在这些文章中 Poincaré 引入了基本群和简单同伦群的概念，给出了 Poincaré 对偶定理的早期叙述，对于链复形引入了 Euler-Poincaré 示性数，提出了若干重要的猜想，其中包括著名的 Poincaré 猜想. 根据 Dieudonné，这些文章给出了拓扑学最早的系统处理，革命性地用代数结构来区分不同胚的空间，为代数拓扑学建立了基础.

引理 1.3. 道路同伦的两条道路拼成的圈是平凡的.

让我们考察一个简单的例子：

例 1.4. 设 $X \subset \mathbb{R}^n$（或一般地在拓扑向量空间中）是星形的，$x_0 \in X$ 是 X 的一个中心点. 上次我们构造了恒等映射 $F(0,x) = x$ 和常值映射 $F(1,x) \equiv x_0$ 之间的同伦映射

$$F : [0,1] \times X \to X, \quad (t,x) \mapsto tx_0 + (1-t)x.$$

现在我们设 $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ 是以 x_0 为基点的任意一个圈. 那么

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X, (t,s) \mapsto F(t, \gamma(s))$$

是 γ 和 γ_{x_0} 之间的道路同伦. 作为结果，基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 只包含一个元素:

$$\pi_1(X, x_0) = \{e\}.$$

一个自然的问题是，当 x_1 不是中心点的时候，$\pi_1(X, x_1)$ 是什么？

1.2 不依赖于基点的选择

更一般地，我们可能会问：给定任意拓扑空间 X 和两个基点 $x_0, x_1 \in X$，$\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(X, x_1)$ 之间的关系是什么？

命题 1.5. 设 x_0 和 x_1 在 X 的同一个道路连通分支中. 那么

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1).$$

证明. 设 λ 是从 x_0 到 x_1 的一条道路，那么它诱导群同态

$$\Lambda : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \quad [\gamma]_p \mapsto [\lambda * \gamma * \bar{\lambda}]_p.$$

下验证它是群同态，

$$\begin{aligned}
\Lambda([\gamma_1]_p \cdot [\gamma_2]_p) &= \Lambda([\gamma_1 * \gamma_2]_p) \\
&= [\lambda * \gamma_1 * \gamma_2 * \bar{\lambda}]_p \\
&= [\lambda * \gamma_1 * \bar{\lambda} * \lambda * \gamma_2 * \bar{\lambda}]_p \\
&= [\lambda * \gamma_1 * \bar{\lambda}]_p \cdot [\lambda * \gamma_2 * \bar{\lambda}]_p \\
&= \Lambda([\gamma_1]_p) \cdot \Lambda([\gamma_1]_p).
\end{aligned}$$

注意到 Λ 是可逆的，其逆 Λ^{-1} 由 $\bar{\lambda}$ 诱导. 因此 Λ 是群同构. □

注记. 在研究拓扑空间 X 的基本群的时候，我们通常假设 X 是道路连通的，使得基本群不依赖于基点的选取. 所以我们可以（并且将）省略基点，将基本群记作 $\pi_1(X)$. 但是，我们必须指出，尽管对任意的 x_0, x_1 有 $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X)$，该同构可能依赖于从 x_0 到 x_1 的道路的选取. 所以我们应该时刻清醒，不像 $\pi_1(X, x_0)$，$\pi_1(X)$ 不是一个具体的群，而仅仅是群的同构类.

注记. 总觉得上面这个命题和同一个轨道中的元素的稳定化子共轭很像呢.

1.3 单连通空间

我们总是乐于研究最简单的对象：

定义 1.6. 设 X 是道路连通的. 我们称 X 是单连通的如果

$$\pi_1(X) = \{e\}.$$

注记. 单连通的概念不仅在拓扑中重要，在复分析中也扮演着重要的角色：

- 事实上，单连通的概念最先由 *Bernhard Riemann* 在他的 *PhD* 毕业论文中引入，在该篇论文中他证明了著名的 *Riemann* 映照定理：任意 $\mathbb{C}$ 中至少含有两个边界点的单连通区域能够被共形映射到单位圆盘.
- 柯西积分定理断言如果 U 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通区域，$f: U \to \mathbb{C}$ 全纯，那么 f 在 U 中的线积分值只依赖于路径的端点.

根据之前的例子，$\mathbb{R}^n$ 或任意拓扑向量空间中的星形区域是单连通的. 这已经包括了任意的 $\mathbb{R}^n$，任意的拓扑向量空间和其中的凸子集.

例 1.7. 对任意 $n \geqslant 2$，$\mathbb{S}^n$ 是单连通的. 这是下面的结果的推论.

命题 1.8. 如果 $X = U \cup V$，其中

- $U, V \subset X$ 是开的和单连通的.
- $U \cap V$ 是道路连通的.

那么 X 是单连通的.

证明. 任取 $x_0 \in U \cap V$ 作为基点. 设 $\gamma: [0,1] \to X$ 是以 x_0 为基点的任意圈，即 $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. 由连续性，$\{\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)\}$ 是 $[0,1]$ 的一个开覆盖. 由 Lebesgue 数引理，

$$\exists\, 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1 \text{ s.t. } \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U \text{或} V.$$

设 λ_i 是从 x_0 到 $\gamma(t_i)$ 的一条被包含在 U 或 V 或 $U \cap V$ 中的道路，这取决于 $\gamma(t_i)$ 落在 U, V 还是 $U \cap V$ 中. 设 γ_i 是沿着 γ 从 $\gamma(t_{i-1})$ 到 $\gamma(t_i)$ 经过重新参数化后的道路. 那么

$$\begin{aligned}
\gamma &\underset{p}{\sim} \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n \\
&\underset{p}{\sim} (\gamma_1 * \bar{\lambda}_1) * (\lambda_1 * \gamma_2 * \bar{\gamma}_2) * \cdots * (\lambda_{n-1} * \gamma_n) \\
&\underset{p}{\sim} \gamma_{x_0} * \gamma_{x_0} * \cdots * \gamma_{x_0} = \gamma_{x_0},
\end{aligned}$$

在最后一步中我们利用了每个圈 $\lambda_i * \gamma_{i+1} * \lambda_{i+1}^{-1}$ 要么落在 U 要么落在 V 中的事实，而这二者都是单连通的. □

注记. 事实上“利用开覆盖来计算基本群”的想法能带我们走向计算基本群的一个非常有力的工具：*van Kampen* 定理. 我们将在后面研究它.

注记. 一个非常自然的问题是：$\pi_1(\mathbb{S}^1)$ 是什么？对任意 $n \in \mathbb{Z}$，令

$$\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{S}^1, t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt}.$$

那么 $[\gamma_n]_p \cdot [\gamma_m]_p = [\gamma_{n+m}]$ 因为 $\gamma_n * \gamma_m$ 是 γ_{n+m} 的重新参数化. 换句话说，映射

$$f : \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{S}^1), n \mapsto [\gamma_n]_p$$

是一个群同态. 下一讲中我们将证明 f 实际上也是一个群同构. 即使在这个简单的例子中，基本群的计算也是高度非平凡的，并且会带我们走向另一个计算基本群的有力手段.

2 基本群的各种面目

2.1 π_1 作为函子

首先，正如我们期待的，π_1 是一个函子. 为了看到这一点，假设我们有一个连续映射 $f: X \to Y$. 设 $y_0 = f(x_0)$. 正如我们上次看到的，如果 $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(X, x_0)$ 且 $\gamma_1 \widetilde{p}\, \gamma_2$，那么 $f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2 \in \Omega(Y, y_0)$ 且 $f \circ \gamma_1 \widetilde{p}\, f \circ \gamma_2$. 换句话说，$f$ 诱导一个良定的映射

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \quad [\gamma]_p \mapsto [f \circ \gamma]_p.$$

显然恒等映射 $\mathrm{Id}_X : X \to X$ 诱导相应的群之间的恒等映射

$$(\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

命题 2.1. *我们有*

(1) f_* *是一个群同态：* $f_*([\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p) = f_*([\gamma_1]_p) * f_*([\gamma_2]_p)$.

(2) *如果* $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ *且* $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$，*那么* $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

证明.

(1)

$$\begin{aligned}
&f_*([\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p)\\
=&f_*([\gamma_1 * \gamma_2]_p)\\
=&[f \circ (\gamma_1 * \gamma_2)]_p\\
=&[(f \circ \gamma_1) * (f \circ \gamma_2)]_p\\
=&[f \circ \gamma_1]_p * [f \circ \gamma_2]_p\\
=&f_*([\gamma_1]_p) * f_*([\gamma_2]_p).
\end{aligned}$$

(2) $(g \circ f)_*([\gamma]_p) = [g \circ f \circ \gamma]_p = g_*([f \circ \gamma]_p) = g_* \circ f_*([\gamma]_p)$.

□

作为结果，我们看到基本群是一个拓扑不变量：

推论 2.2. *如果* $f: X \to Y$ *是一个同胚，那么我们有群同构*

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, f(x_0)).$$

为了说清 π_1 是一个函子，我们需要明确范畴. 注意到我们必须要么将自己限制在道路连通拓扑空间范畴中，要么将自己限制在“点拓扑空间”$\mathcal{P}ointed\mathcal{TOP}$，其

- 对象是点拓扑空间 (X, x_0),
- 态射是“点连续映射”
$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0),$$
即 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ 满足 $f(x_0) = y_0$.

现在我们能够得出结论 π_1 是一个函子

$$\pi_1 : \mathcal{P}ointed\mathcal{TOP} \to \mathcal{GROUP}$$

使得

$$(X, x_0) \rightsquigarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$f \in \mathcal{C}((X, x_0), (Y, y_0)) \rightsquigarrow f_* = \pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0).$$

2.2 几何含义：形变等价的圈

2.3 π_0 和 π_1 作为相对同伦等价类

有另一种方式来关联 π_0 和 π_1：相较将 $\pi_1(X, x)$ 视作以 x 为基点的圈的道路同伦等价类，我们也可以将其

换句话说，$\pi_1(X, x)$ 是带基点的连续映射 $f : (\mathbb{S}^1, p) \to (X, x)$ 的同伦等价类.

以一种非常相似的方式，

$$\pi_0(X) = \pi_0(X, x) = [(\mathbb{S}^0, p), (X, x)],$$

其中 $p = 1 \in \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\} = \partial I \subset \mathbb{R}$. 让我们解释一下为什么：

2.4 同伦群 π_n

更一般地，对于 $n \geqslant 2$，我们能够考虑带基点的连续映射

$$f : (\mathbb{S}^n, p) \to (X, x),$$

其中 $p = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{S}^n = \partial B^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. 两个这样的映射 f_1, f_2 是同伦的如果存在一个连续映射 $F : [0, 1] \times \mathbb{S}^n \to X$ 满足

$$F(0, s) = f_1(s), F(1, s) = f_2(s), F(t, p) = x.$$

这同样定义了 $\mathcal{C}((\mathbb{S}^n, p), (X, x))$ 上的一个等价关系.

定义 2.3. *同伦类的集合记作*

$$\pi_n(X, x) = [(\mathbb{S}^n, p), (X, x)],$$

它被称作第 n 同伦群.

3 同伦等价

3.1 同伦等价

回忆两个拓扑空间 X,Y 是同胚的，记作 $X \simeq Y$，如果

$$\exists f \in \mathcal{C}(X,Y), g \in \mathcal{C}(Y,X) \text{ s.t. } f\circ g = \mathrm{Id}_Y, g\circ f = \mathrm{Id}_X .$$

我们已经看到如果 $X \simeq Y$，那么

$$\pi_1(X,x) \simeq \pi_2(Y,f(x))$$

并且事实上 $\pi_n(X,x) \simeq \pi_n(Y,f(x))$ 对于所有的 n 成立.

另一方面，我们也有 $X \not\simeq Y$ 但 $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ 的例子，比如

$$\pi_1(\mathbb{R}^k) = \pi_1(\{p\}) = \{e\}, \forall k,$$

并且事实上 $\pi_n(\mathbb{R}^k) = \pi_n(\{p\}) = \{e\}$ 对于所有的 n 和 k 都成立.

注意同胚是一个非常强的等价关系：如果 $X \simeq Y$，那么 X 和 Y 有许多相同的拓扑性质（紧性，连通性，可度量性，可数性，分离性等等）. 现在我们定义拓扑空间之间一个弱得多的等价关系：

定义 3.1. *我们称 X 和 Y 是同伦等价的，记作 $X \sim Y$，如果*

$$\exists f \in \mathcal{C}(X,Y), g \in \mathcal{C}(Y,X) \text{ s.t. } \quad f\circ g \sim \mathrm{Id}_Y, g\circ f \sim \mathrm{Id}_X .$$

这样的映射 f 和 g 称作 X 和 Y 之间的同伦等价.

注记.

(1) *按定义，f 和 g 在同伦的层面上是彼此的逆. 它们不必是可逆映射.*

(2) *显然如果 $X \simeq Y$ 则 $X \sim Y$.*

(3) *容易验证同伦等价是一个等价关系.*

(4) *大部分拓扑性质（包括紧性，分离性，可数性，可度量性等等）都不在同伦等价下保持.*

例 3.2. *我们有 $\mathbb{S}^n \sim \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.*

3.2 可缩 = 同伦等价于一点

回忆：一个拓扑空间 X 是可缩的如果 $\mathrm{Id}_X : X \to X$ 是零伦的. 从而对任意映射 $f : X \to \{pt\}, g : \{pt\} \to X$，我们有

$$f\circ g = \mathrm{Id}_{\{pt\}}, \quad g\circ f \sim \mathrm{Id}_X .$$

换句话说，任意可缩空间 $X \sim \{pt\}$. 这包括了 $\mathbb{R}^k$ 和 $\mathbb{R}^k$ 中的任意星形区域，还有任意拓扑空间 X 的锥空间 $C(X) = X \times [0,1]/X \times \{0\}$.

相反，如果 $X \sim \{pt\}$，那么存在

$$f : X \to \{pt\}, \quad g : \{pt\} \to X$$

使得 $g\circ f \sim \mathrm{Id}_X$. 因为 $g\circ f$ 是一个常值映射，我们得出 Id_X 是零伦的. 换句话说，我们有

命题 3.3. *X 是可缩的 $\Longleftrightarrow X \sim \{pt\}$.*

3.3 π_1 的同伦等价

尽管大部分拓扑性质在同伦等价下得不到保持，容易验证道路连通性是保持的. 因此基本群有机会在同伦等价下保持. 事实正是如此：

定理 3.4. 设 $f : X \sim Y$ 是一个同伦等价，那么 $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ 是一个群同构.

为了证明这个定理,我们首先证明同伦的两个映射诱导几乎相同的群同态. 更确切地说,设 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X, Y)$，且 $f_1 \sim f_2$. 固定 $x_0 \in X$. 设 $F : [0, 1] \times X \to Y$ 是 f_1 与 f_2 之间的同伦. 那么

$$\lambda(t) := F(t, x_0), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

是从 $y_1 = f_1(x_0)$ 到 $y_2 = f_2(x_0)$ 的一条道路. 设

$$\Lambda : \pi_1(Y, y_1) \to \pi_1(Y, y_2), \quad [\gamma]_p \mapsto [\lambda * \gamma * \bar{\lambda}]_p$$

是由道路 λ 诱导的“改变基点”的群同构.

引理 3.5. 作为从 $\pi_1(X, x_0)$ 到 $\pi_1(Y, y_2)$ 的群同构，$(f_2)_* = \Lambda \circ (f_1)_*$.

证明. 任取 $[\gamma]_p \in \pi_1(X, x_0)$. 我们希望构造 $f_2 \circ \gamma$ 和 $\lambda * (f_1 \circ \gamma) * \bar{\lambda}$ 之间的道路同伦. 令

□

现在我们来证明基本群的同伦不变性：

证明. 从 $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$，我们得到

$$\Lambda \circ f_* \circ g_* = \mathrm{Id} : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(Y, y),$$

所以 f_* 是满射. 相反地 $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ 意味着

$$\widetilde{\Lambda} \circ g_* \circ f_* = \mathrm{Id} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x.)$$

从而 f_* 是单射. 所以 f_* 是群同构. □

从而

推论 3.6. 任意可缩空间是单连通的.

推论 3.7. $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1)$，且 $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \{e\}$ 当 $n \geqslant 3$.

4 PSet10-1

(1)[The fundamental group of the product space]

(a) Prove: $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_(Y, y_0)$.

(b) Does the same conclusion hold for arbitrary product? Prove your conclusion.

证明.

(a)

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_(Y, y_0) \\ [\alpha]_p &\longmapsto ([p_1 \circ \alpha]_p, [p_2 \circ \alpha]_p) \end{aligned}$$

有几件较为显然的事情需要验证：

- φ 的良定性，即不依赖于代表元 α 的选取. 只需注意到道路同伦被 p_i 投影下来后还是道路同伦.
- φ 是群同态.

$$\begin{aligned} \varphi([\alpha]_p \cdot [\beta]_p) &= \varphi([\alpha * \beta]_p) \\ &= ([p_1 \circ \alpha * \beta]_p, [p_2 \circ \alpha * \beta]_p) \\ &= ([p_1 \circ \alpha * p_1 \circ \beta]_p, [p_2 \circ \alpha * p_2 \circ \beta]_p) \\ &= ([p_1 \circ \alpha]_p \cdot [p_1 \circ \beta]_p, [p_2 \circ \alpha] \cdot [p_2 \circ \beta]_p) \\ &= ([p_1 \circ \alpha]_p, [p_2 \circ \alpha]_p) \cdot ([p_1 \circ \beta]_p, [p_2 \circ \beta]_p) \\ &= \varphi([\alpha]_p) \cdot [\varphi([\beta]_p)]. \end{aligned}$$

- φ 是满射.
- φ 是单射. 只需注意到道路同伦拼起来还是道路同伦.

(b) 成立. 论证同上.

□

(2)[Base point change isomorphism]
Let X be path connected, $x_0, x_1 \in X$. We have seen in the proof of Proposition 1.4 that any path λ from x_0 to x_1 induces a group isomorphism $\Lambda : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$.

(a) Suppose λ_1 is a path from x_0 to x_1, λ_2 is a path from x_1 to x_2. Let $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ be the corresponding group isomorphisms generated by λ_1, λ_2 and $\lambda_1 * \lambda_2$ respectively. Prove: $\Lambda_3 = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$.

(b) Prove: $\pi_1(X, x_0)$ is abelian if and only if for any two paths λ_1, λ_2 from x_0 to x_1, we have $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

(c) Suppose X, Y are path connected, and $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. I want to prove that the gropu homomorphism $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ is independent of the choice of x_0. Please write down an explicit formula/statement and prove it.

证明.

(a) 显然.

(b)
- $\Longrightarrow$ 即证 $\Lambda_1 \circ \Lambda_2^{-1} = \mathrm{Id}$.

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \circ \Lambda_2^{-1} : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma]_p &\longmapsto [\bar{\lambda}_2 * \lambda_1 * \gamma * \bar{\lambda}_1 * \lambda_2]_p \end{aligned}$$

注意到 $[\bar{\lambda}_1 * \lambda_2]_p \in \pi_1(X, x_0)$，由其可交换立得 $\Lambda_1 \circ \Lambda_2^{-1} = \mathrm{Id}$.

- $\Longleftarrow$ 只需注意到任意 $\pi_1(X, x_0)$ 中元素都可以表示为 $[\bar{\lambda}_1 * \lambda_2]_p$ 的形式.

(c)

命题 4.1. 设 x_0 和 x_1 在 X 的同一个道路连通分支中，那么下列图表交换，

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ {\scriptstyle \Lambda_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Lambda_Y} \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & \pi_1(Y, f(x_1)) \end{array}$$

其中 Λ_X 是由从 x_0 到 x_1 的一条道路 λ 诱导的，Λ_Y 是由 $f \circ \lambda$ 诱导的.

证明.

$$\begin{array}{ccc} [\gamma]_p & \longmapsto & [f \circ \gamma]_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[\bar{\lambda} * \gamma * \lambda\right]_p & \longmapsto & \left[\overline{f \circ \lambda} * f \circ \gamma * f \circ \lambda\right] \end{array}$$

□

□

(3)[Retract and deformation retract]
Recall from PSet08-2 that a subset $A \subset X$ is called a *retract* of X if there exists a continuous map (called a *retration*) $r : X \to A$ such that $r\big|_A = \mathrm{Id}_A$.

(a) Suppose $r : X \to A$ is a retraction from X to A. Let $\iota : A \hookrightarrow X$ be the inclusion map. Prove: For any $a \in A$, the map $r_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ is surjective, and the map $\iota_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ is injective.

(b) We say A is a *deformation retract* of X if Id_X is homotopic to a retraction $r : X \to A$, in other words, if there exists a continuous map (called a *deformation retraction*) $F : [0, 1] \times X \to X$ such that

$$F(0, x) = x, F(1, x) \in A, \forall x \in X \quad \text{and} \quad F(1, a) = a, \forall a \in A.$$

(i) Prove: $\mathbb{S}^n$ is a deformation retract of $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$.

(ii) Prove: X is contractible if and only if it deformation retracts to a point.

(iii) Prove: If $A \subset X$ is a deformation retract, then $A \sim X$.

(iv) Prove: $A \subset X$ is a deformation retract of X if and only if it satisfies the following two properties:

- For any topological space Y, any continuous map $f : A \to Y$ has a continuous extension $\tilde{f} : X \to Y$.
- For any topological space Y and any continuous maps $f, g : X \to Y$, if $f\big|_A$ is homotopic to $g\big|_A$, then f is homotopic to g.

证明.

(a)
- r_* 满射是显然的.
- 设 $[\gamma]_p \in \pi_1(A, a)$，且 $\iota \circ \gamma \underset{p}{\sim} \gamma_a$，则存在 X 中的道路同伦 $F : [0,1] \times [0,1] \to X$，使得 $F(0,t) = \iota \circ \gamma$，$F(1,t) = \gamma_a$，（注意 F 可能跑到 A 的外面）则 $r \circ F$ 便是 γ 和 γ_a 在 A 中的道路同伦.

(b) (i)

$$F : [0,1] \times \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}, \quad (t,x) \longmapsto \frac{x}{1 - t + t\|x\|}.$$

(ii) X 可缩 $\Longleftrightarrow \mathrm{Id}_X$ 同伦于某常值映射 $\Longleftrightarrow$ 某单点集是 X 的形变收缩核.

(iii) $r : X \to A$，$\iota : A \to X$.

$$\iota \circ r = r \sim \mathrm{Id}_X, \quad r \circ \iota = \mathrm{Id}_A.$$

(iv)
- $\Longrightarrow$
  - $\tilde{f} = r \circ f$ 即符合要求.
  - $G : [0,1] \times X \to Y, (t,x) \mapsto f(F(t,x))$，则 G 是 f 与 $f\big|_A$ 之间的同伦映射. 由传递性知 f 同伦于 g.
- $\Longleftarrow$ 嵌入映射能够连续延拓为 $r : X \to A$，它限制在 A 上就是 Id_X 限制在 A 上，因此 r 与 Id_X 同伦.

□

(4)[Homotopy extension property]

Let $A \subset X$. We say the pair (X, A) satisfies the *homotopy extension property* if for any continuous map $f_0 L X \to Y$ and any homotopy $G : [0,1] \times A \to Y$ with $G(0,\cdot) = g_0 = f_0\big|_A$, there exists a homotopy $F : [0,1] \times X \to Y$ with $F(0,\cdot) = f_0$ that extends G, i.e.$F\big|_{[0,1]\times A} = G$.

(a) Check:$(\overline{B^n}, \mathbb{S}^{n-1})$ has the homotopy extension property.

(b) Prove:(X, A) has the homotopy extension property if and only if $([0,1] \times A) \cup (\{0\} \times X)$ is a retract of $[0,1] \times X$.

(c) Prove: If (X, A) has the homotopy extension property, so does $(X \times Y, A \times Y)$ for any Y.

(d) Prove: If the pair (X, A) has the homotopy extension property, and A is contractible, then the quotient map $p : X \to X/A$ is a homotopy equivalence.

Chapter 5

$\mathbb{S}^1$ 的基本群

1 $\pi_1(\mathbb{S}^1)$

1.1 计算 $\pi_1(\mathbb{S}^1)$

为了计算 $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$，我们将 $\mathbb{S}^1$ 视作 $\mathbb{C}$ 的子集. 直觉上，我们能够看到 $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$，沿 $\mathbb{S}^1$ 顺时针转 n 圈对应于 $n \in \mathbb{Z}$.

所以我们需要 $\mathbb{Z}$ 和 $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ 之间的一个群同构，而这是容易建立的：

$$\Phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1), \quad n \longmapsto [\gamma_n]_p,$$

其中 γ_n 是圈

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad t \longmapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nt}.$$

我们上次提到了映射 Φ 是群同态. 现在我们要证明

定理 1.1. *Φ 是群同构.*

注记. *所以我们不仅有 $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$，我们还知道 $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ 可以由 $[\gamma_1]_p$ 或 $[\gamma_{-1}]_p$ 生成.*

证明. $\boxed{\textbf{Step 0}}$ 提升到 $\mathbb{R}$.

注意，$\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. 商映射 $x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {} \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

最关键的一点：$\mathbb{R}$ 是单连通的. 提升上去，只需要看起点和终点，便可以判断是否道路同伦.

$\boxed{\textbf{Step 1}}$ Φ 是群同态.

$\boxed{\textbf{Step 2}}$ Φ 是满射.

$\boxed{\textbf{Step 3}}$ Φ 是单射.

假设 $\Phi(n) = \Phi(m)$，即存在道路同伦 $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ 连接 γ_n 和 γ_m. 再一次的我们将 $\mathbb{S}^1$ 上的同伦提升到 $\mathbb{R}$. 所以我们需要：

<u>同伦提升</u>：存在唯一的 $\widetilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 满足 $\widetilde{F}(t, 0) \equiv 0$，$p \circ \widetilde{F} = F$.

承认这条，那么

$$p \circ \widetilde{F}(0,t) = \gamma_n(t)$$

□

2 提升引理

2.1 提升引理

引理 2.1. 给定连续映射 $F\colon P\times I\to\mathbb{S}^1$，记 $F_0=F\big|_{P\times\{0\}}$. 给定 F_0 的提升 $\widetilde{F}_0$，存在唯一的 F 的提升 $\widetilde{F}$ 满足 $\widetilde{F}_0=\widetilde{F}\big|_{P\times\{0\}}$.

推论 2.2. 由唯一性，投下来的道路的提升是本身.

3 PSet10-2

(1)[More fundamental groups]

Find the fundamental groups of the following spaces:

(a) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^n$ 由 PSet10-1-(1)，$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^n) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z} \times \{e\} \simeq \mathbb{Z}_1$.

(b) $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \sim \mathbb{S}^1$，因此 $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

(c) $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^{n-2} \simeq \mathbb{R}^{n-2} \times (\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$，因此 $\pi_1(\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^{n-2}) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^{n-2}) \times (\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}) \simeq \{0\} \times \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$.

(d) The Möbius strip$\simeq \mathbb{S}^1$

(e) $\mathbb{Z}^r$.

(f) 由 van Kampen 定理，$\pi_1(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^2) * \pi_1(\mathbb{S}^1) = \{e\} * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$.

(g)

(h)

(i) $\mathbb{R}^3 \backslash (\{(0,0,z) \big| z \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,y,0) \big| x^2+y^2=1\})$,它同伦等价于环面,参见clever-homotopy-equivalences

(j)

(2)[The induced group homomorphisms]

For each of the following maps, compute f_* on corresponding fundamental groups.

(a) $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, z \mapsto z^n$.

$f_* : \mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}, m \mapsto nm$.

(b) $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, z \mapsto (z^m, z^n)$.

$f_* : \mathbb{Z} \to m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}, l \mapsto (ml, nl)$

(c) $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1, (z_1, z_2) \mapsto z_1^m z_2^n$.

$f_* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (t_1, t_2) \mapsto (mt_1 + nt_2)$

Chapter 6

覆叠空间

1 定义与例子

在证明 $\mathbb{S}^1$ 的提升引理时最关键的要素是投影映射 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ 的“局部可逆性”，即存在 $\mathbb{S}^1$ 的开覆盖 $\{U_i\}$ 使得

- $p^{-1}(U_i)=\bigcup\limits_j V_j^i$ 是 $\mathbb{R}$ 中不交开集的并，
- 每个 $p_j^i=p\big|_{V_j^i}:V_j^i\to U_i$ 是同胚.

事实上这样的“覆叠结构”在几何中广泛存在，并且这种覆叠结构与基本群密切相关：不仅覆叠结构能够用来计算某些复杂空间的基本群，基本群也能够用来分类覆叠空间. 让我们回忆定义：

定义 1.1. 设 X 是一个拓扑空间.X 的一个覆叠空间是一个拓扑空间 $\widetilde{X}$ 和一个连续映射 $p:\widetilde{X}\to X$（称作覆叠映射）满足对于任意 $x\in X$，存在 x 的一个开邻域 U 满足

(1) $p^{-1}(U)=\bigcup\limits_\alpha V_\alpha$ 是 $\tilde{X}$ 中不交开集的并，

(2) 对每个 α，映射 $p_\alpha:=p\big|_{V_\alpha}:V_\alpha\to U$ 是同胚.

空间 $\widetilde{X}$ 称作全空间，X 称作底空间，对每个 $x\in X$，原像 $p^{-1}(x)$ 称作 x 上的纤维.

容易看出，纤维 $p^{-1}(x)$ 的势是局部常值的. 从而同一个连通分支内的两点处的纤维是等势的.

我们将总是假定 X 和 $\widetilde{X}$ 是道路连通的，否则可取其道路连通分支：任给 $X_0\subset X$，$p^{-1}(X_0)$ 是 X_0 的覆叠空间；在假定 X 道路连通的条件下，$\widetilde{X}$ 的任意连通分支仍是 X 的覆叠空间.

下面是覆叠空间的一些例子.

例 1.2. $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{S}^1$ 的覆叠空间，覆叠映射为 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1, x\mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x}$. 类似地，$\mathbb{S}^1$ 能够以许多种不同的方式作为 $\mathbb{S}^1$ 的覆叠空间：对每个 $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$，

$$p_n:\mathbb{S}^1\longrightarrow\mathbb{S}^1,\quad z\longmapsto z^n$$

给出了 $\mathbb{S}^1$ 的 $|n|$ 重覆叠.

例 1.3. 复指数映射

$$\exp:\mathbb{C}\to C^*=C\setminus\{0\}$$

是一个覆叠映射：对每个 $z = re^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}^*$，我们有 $\exp^{-1}(z) = \{\log r + (2k\pi + \theta)\mathrm{i} | k \in \mathbb{Z}\}$，由之容易验证 exp 是一个覆叠映射. 类似地映射

$$p_n : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \longmapsto z^n$$

对任意 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 是一个 $|n|$ 重覆叠. 但是，相同的映射 $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ 不是一个覆叠映射.

2 提升性质

定义 2.1. 设 $f\colon Y\to X$ 是一个连续映射. 称连续映射 $\tilde{f}\colon Y\to \widetilde{X}$ 是 f 的一个提升，如果 $p\circ\tilde{f}=f$，即下列图表交换，

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}.$$

2.1 提升引理

引理 2.2. 设 γ 是 Y 中的一条道路. 那么 $f\circ\gamma$ 的提升是 $\tilde{f}\circ\gamma$.

重复之前的证明，我们有

引理 2.3 (提升引理)**.**

分别将 P 取为 $\{pt\}$ 和 $P=[0,1]$，我们得到

推论 2.4 (道路提升性质)**.**

推论 2.5 (同伦提升性质)**.**

注意到 $p^{-1}(x_0)$ 的集合是离散的，即各点落在不交的开集中，我们有下面的

推论 2.6 (道路同伦提升性质)**.**

2.2 一般提升的唯一性与存在性

现在我们考虑一般的提升. 事实上提升的唯一性总是成立的.

命题 2.7 (提升性质的唯一性)**.** 设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是一个覆叠映射，$f:Y\to X$ 是一个连续映射，设 $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2:Y\to\widetilde{X}$ 是 f 的两个提升. 设 Y 是连通的，假设存在 $y_0\in Y$ 使得 $\tilde{f}_1(y_0)=\tilde{f}_2(y_0)$. 那么 $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$.

一般的提升的存在性要更加复杂. 假设 f 的提升 $\tilde{f}$ 存在，那么我们有下面的“点版本”的图表.

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X},\tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y,y_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (X,x_0) \end{tikzcd}.$$

特别地，由 π_1 的函子性质，我们有

$$f_*(\pi_1(Y,y_0))=p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y,y_0)))\subset p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)).$$

事实上该条件对于提升的存在来说也是充分的，只要我们假设 Y 是道路连通和局部道路连通的.

定理 2.8. 设 $p\colon(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是覆叠映射，$f\colon(Y,y_0)\to(X,x_0)$ 连续. 如果 Y 是道路连通的并且是局部道路连通的，那么提升 $\tilde{f}$ 存在当且仅当

$$f_*(\pi_1(Y,y_0))\subset p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)). \qquad (*)$$

命题 2.9. 设 $\gamma \in \Omega(x, x_0)$，$\tilde{\gamma}$ 是 γ 以 $\tilde{x}_0$ 为起点的提升. 那么 $\tilde{\gamma} \in \Omega(\widetilde{X}_0, \tilde{x}_0) \Longleftrightarrow [\gamma]_p \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$.

定理 2.4 的证明. 只证充分性.

任取 $y \in Y$，由 Y 的道路连通性，存在一条道路 γ 从 y_0 到 y.

f 将 γ 映成 X 中连接 x_0 和 $f(y)$ 的道路 $f \circ \gamma$，其以 $\tilde{x}_0$ 为起点的提升为 $\widetilde{f \circ \gamma}$.

将 $\tilde{f}(y)$ 定义为 $\widetilde{f \circ \gamma}(1)$. 我们将首先说明 $\tilde{f}$ 的良定性，再说明 $\tilde{f}$ 是连续的.

取连接 y_0 和 y 的另一条道路 γ'，我们要说明 $\widetilde{f \circ \gamma}$ 和 $\widetilde{f \circ \gamma'}$ 有相同的终点.

这等价于（why?）要说明 $\widetilde{f \circ \gamma} * \widetilde{f \circ \gamma'}$，作为 $\Omega(X, x_0)$ 中的元素，其提升落在 $\Omega(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ 中.

这是由条件 $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ 和简单的命题保证的.

由 p 的局部可逆性，$\tilde{f}$ 的连续性似乎是显然的，因为看起来我们可以局部地将 $\tilde{f}$ 表示为 $p^{-1} \circ f$.

我们将这样做，并看看 Y 的局部道路连通性用在了哪里.

任给 $y \in Y$，设 U 是 $f(y)$ 的覆叠映射的定义中的邻域，$p^{-1}(U) = \bigsqcup V_\alpha$.

注意到，p 限制在单片 V_α 上才是同胚.

因此，如果我们想利用 $\tilde{f} = p^{-1} \circ f$ 说明 $\tilde{f}$ 的连续性，我们必须得说明 $\tilde{f}$ 将一个邻域中的 y 全送到了同一个片 V_α 中，而这正是由 Y 的局部道路连通性保证的. □

2.3 $\alpha\colon \pi_1(X,x_0)\longrightarrow p^{-1}(x_0)$

定义 2.10. 设 $p\colon \widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射，$p(\tilde{x}_0)=x_0$. 定义

$$\begin{aligned}\alpha\colon \pi_1(X,x_0) &\longrightarrow p^{-1}(x_0)\\ [\gamma]_p &\longmapsto \tilde{\gamma}(1),\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\gamma}$ 是 γ 以 $\tilde{x}_0$ 为起点的提升.

命题 2.11.

(0) α 不是群同态，因为右侧无群结构.

(1) α 是满射.

(2) 如果 $\widetilde{X}$ 是单连通的，那么 α 是单射. 可替换成 *Munkres54.6b*，要稍微更强一点.

证明.

(1) 因为我们总是假定 $\widetilde{X}$ 是道路连通的，所以对任意 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$，我们能够选取 $\widetilde{X}$ 中的一条道路从 $\tilde{x}_0$ 到 $\tilde{x}_1$. 那么 $\gamma=p\circ\lambda\in\Omega(X,x_0)$. 由提升的唯一性知 $\alpha([\gamma]_p)=\lambda(1)=\tilde{x}_1$.

(2) 任取 $\gamma,\gamma'\in\Omega(X,x_0)$.

$\alpha([\gamma]_p)=\alpha([\gamma']_p)$ 意味着 $\tilde{\gamma}$ 和 $\tilde{\gamma}'$ 有相同的起点和终点.

而这在一个单连通的空间中意味着 $\tilde{\gamma}\overset{p}{\sim}\tilde{\gamma}'$.

将二者的道路同伦投影下来便得到 γ 和 γ' 的道路同伦，因此 $\gamma\overset{p}{\sim}\gamma'$.

$\square$

3 群作用

设群 G 左作用在拓扑空间 $\widetilde{X}$ 上，问投影映射 $p:\widetilde{X}\to X:=\widetilde{X}/G$ 何时是覆叠映射？

注记. 回忆

- 我们要求对每个 g，$x\mapsto g\cdot x$ 是连续映射.
- 我们总是假定群作用是忠实的，否则考虑 $G/\ker\rho$，其中 $\rho\colon G\to \mathrm{Hom}(X)$.

定义 3.1. 称群作用 $G\curvearrowright X$ 是真不连续的，如果对任意 $x\in X$，存在开邻域 U_x，满足

$$(g\cdot U_x)\cap U_x=\varnothing,\quad \forall\ g\neq e.$$

命题 3.2. $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射当且仅当 $G\curvearrowright\widetilde{X}$ 是真不连续的.

证明.

$\Longrightarrow$ 任取 $\tilde{x}\in\widetilde{X}$，记 $x=p(\tilde{x})$. 因为 p 是覆叠映射，所以存在 x 的邻域 U，使得 $p^{-1}(U)=\bigsqcup\limits_{\alpha}V_\alpha$.

不妨设 $\tilde{x}\in V_\alpha$，任取 $g\neq e$，由定义有 $p\circ\rho_g=p$，所以存在 $\beta\neq\alpha$ 使得 $g\cdot V_\alpha=V_\beta$.

$\Longleftarrow$

□

4 覆叠变换

5 PSet11-1

(1)[Products of coverings]

(a) Prove: If $p : \tilde{X} \to X$ and $p' : \widetilde{X'} \to X'$ are covering maps, so is their product $p \times p' : \widetilde{X} \times \widetilde{X'} \to X \times X'$.

(b) Let $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ be the standard covering map. Prove: The infinite product $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} p : \prod\limits_{n\in N} \mathbb{R} \to \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{S}^1$ is NOT a covering map.

(2)[Fundamental groups of covering spaces]
Suppose $X, \widetilde{X}$ are path-connected, $p : \widetilde{X} \to X$ is a covering map, and $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

(a) Prove: $p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ is injective.

(b) Suppose γ is a loop in X based at x_0. Prove: γ can be lifted to a *loop* in $\widetilde{X}$ based at $\tilde{x}_0$ if and only if $[\gamma] \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$.

(c) Prove: the index of the subgroup $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ in $\pi_1(X, x_0)$ is the cardinality of $p^{-1}(x_0)$.

(d) Prove: If the base space X is simply connected, then p is a homeomorphism.

(e) Suppose $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$. Prove: As subgroups of $\pi_1(X, x_0)$, the two groups $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ and $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1))$ are conjugate to each other.

证明.

(a) 设 $p_*([\tilde{\gamma}]_p) = [\gamma_{x_0}]_p$

(b)

(c)

(d)

(e)

□

(3)[The Klein bottle via group action]
Let $G = \left\langle a, b \middle| a^{-1}bab = 1 \right\rangle$.Consider the action of G on $\mathbb{R}^2$ generated by

$$a \cdot (x, y) := (-x, y - 1), \quad b \cdot (x, y) = (x + 1, y).$$

(a) Check: This does define an action of G on $\mathbb{R}^2$

(b) Prove: The action satisfies the condition.

(c) What is the fundamental group of the Klein bottle?

(d) Also check that the quotient space in Example 1.9 is Klein bottle, and thus $\mathbb{T}^2$ is a double covering of the Klein bottle.

证明.

(a)

$$\begin{aligned}(a^{-1}bab)\cdot(x,y) &= a^{-1}\cdot(b\cdot(a\cdot(b\cdot(x,y))))\\ &= a^{-1}\cdot(b\cdot(a\cdot(x+1,y)))\\ &= a^{-1}\cdot(b\cdot(-x-1,y-1))\\ &= a^{-1}\cdot(-x,y-1)\\ &= (x,y)\end{aligned}$$

(b) $g\cdot(x,y)=x,y \iff g=1$，于是 $g\cdot(x,y)\neq(x,y)$，取 $\tilde{U},V$ 是开集，$\tilde{U}\cap V=\varnothing$，$g(x,y)\in\tilde{U}$，$(x,y)\in V$，$g^{-1}\cdot\tilde{U}\cap V=:U$ 满足 $g\cdot U\cap U=\varnothing$.

(c) G 的轨道代表元系可选在 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$ 中，且有等价关系 $(-\dfrac{1}{2},y)\sim(-\dfrac{1}{2},y)$，$(1-x,1)\sim(x-1,0)$，即 $\mathbb{R}^2/G$ 为 Klein 瓶，由 (b)，$\pi_1(K)\simeq G$.

(d) 记 $(z,w)=(\mathrm{e}^{2\pi},\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s})$，$(t,s)\in[0,1]\times[0,1]/\sim$，$(0,s)\sim(1,s)$，$(t,1)\sim(t,0)$.

$\mathbb{Z}^2$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上的作用定义为

$$(z,w)\sim(\bar{z},-w),(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t},\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s})\sim(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t},\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s+\pi\mathrm{i}}),(t,s)\sim(-t,s+\frac{1}{2})$$

是完全代表元系取到 $[0,1]\times[0,\dfrac{1}{2}]$ 内，$(1-t,0)\sim(t,\dfrac{1}{2})$，知 $\mathbb{T}^1/\mathbb{Z}^2\simeq K$.

□

Chapter 7

覆叠空间的分类

- 事实：$p_*:\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi_1(X,x_0)$ 是单射.
- 万有覆叠的大量例子.
- 半局部单连通.
  - 不半局部单连通的例子：夏威夷耳环.
  - 半局部单连通但不局部单连通的例子：夏威夷耳环的锥空间.
- 万有覆叠的存在性定理.

1 万有覆叠

1.1 万有覆叠

- 思考两个存在性之间的关系.
- $p_*:\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi_1(X,x)$ 是单射.
- $[\pi_1(X_1,x_0):p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x_0}))]=|p^{-1}(x_0)|$.
- X 中圈 γ 的提升是 $\widetilde{X}$ 中的圈当且仅当 $[\gamma]_p\in p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0))$
- $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}))=g^{-1}p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0))g$，其中 $g=[\gamma]_p$，齐总 $\tilde{\gamma}$ 是从 $\tilde{x_0}$ 到 $\tilde{x_1}$ 的一条道路.

(X,x_0) 的覆叠空间与子群 $\pi_1(X,x_0)$ 之间的反向的一一对应. 基本群越小，覆叠空间越大.

注记. *Galois 理论！对应！最大的域延拓对应的 Galois 群越小！覆叠空间的 Galois 理论.*

在 PSet11-1-2 中我们已经看到 $p_*:\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi_1(X,x_0)$ 是单射. 所以 $\pi_1(X,x_0)$ 的子群 $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0))$ 同构于 $\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)$. 本章的主题是建立 $\pi_1(X,x_0)$ 的子群和 X 的覆叠空间之间的一一对应. 我们首先从 $\pi_1(X,x_0)$ 的最小子群开始，即 $\{e\}$，这给出了最大的覆叠空间.

定义 1.1. *我们称覆叠空间 $\widetilde{X}$ 是 X 的万有覆叠如果 $\pi_1(\widetilde{X})=\{e\}$.*

例 1.2.

(1) $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1, t\mapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}$，而 $\mathbb{S}^1$ 不是 $\mathbb{S}^1$ 的万有覆叠.

(2) $\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$

(3) $\mathbb{R}^2\to\mathbb{T}^2$

(4) 由单值化定理，$\mathbb{D}$ 是 Σ_n 的万有覆叠，其中 $n\geqslant 2$.

(5) $\mathbb{S}^n$ 是 $\mathbb{RP}^n$ 的万有覆叠，其中 $n\geqslant 2$.

(6) $\mathbb{S}^3$ 是 $L(p,q)$ 的万有覆叠.

(7) $SU(2)\to SO(3)$

注记. $Spin(n)\to SO(n)$，二重

(8) *Caylay graph of* $(a_1,\cdots,a_m)$ 到 $\mathbb{S}^1 v\cdots\mathbb{S}^1$.

1.2 万有覆叠空间的存在性

给定覆叠映射 $p\colon\widetilde{X}\to X$.
对任意 $x\in X$，存在 x 的邻域 U 和 $\widetilde{X}$ 中的开集 $\widetilde{U}$ 使得 $p\big|_{\widetilde{U}}\colon\widetilde{U}\to U$ 是同胚.
现在 U 中的每个圈 γ 都能够被提升为 $\widetilde{U}$ 中的圈 $\tilde{\gamma}$.
设 $\widetilde{X}$ 是万有覆叠，那么 $\tilde{\gamma}$ 在 $\widetilde{X}$ 中道路同伦于常值道路，从而 γ 在 X 中道路同伦于常值道路.
换句话说，对任意 $x\in X$，存在 x 的邻域 U 使得 U 中的圈在 X 中是零伦的.
即由包含映射 ι 诱导的群同态 $\iota_*\colon\pi_1(U,x)\to\pi_1(X,x)$ 是平凡的.

定义 1.3. *称拓扑空间 X 是半局部单连通的，如果对任意 $x\in X$，存在 x 的邻域 U 使得由包含映射 $\iota\colon U\hookrightarrow X$ 诱导的群同态 $\iota_*\colon\pi_1(U,x)\to\pi_1(X,x)$ 是平凡的.*

定理 1.4. *如果 X 是道路连通、局部道路连通且半局部单连通的，那么存在 X 的万有覆叠 $\widetilde{X}$.*

证明.

(1) 构造集合 $\widetilde{X}=\big\{[\gamma]_p \mid \gamma\text{是}X\text{中以}x_0\text{为起点的道路}\big\}$.

有自然投影 $p\colon\widetilde{X}\to X, [\gamma]_p\mapsto\gamma(1)$.

(2) “局部”来看 p 是双射.

此时在 $\widetilde{X}$ 上还没有拓扑，实际上不能谈局部.

我们要对每点找一个包含它的集合使得 p 限制在上面是双射.

对任意以 x_0 为起点的道路 $\gamma\colon[0,1]\to X$，令 $U\subset X$ 是 $\gamma(1)$ 的道路连通且任意 U 中的圈都在 X 中零伦的开邻域. U 的选取有讲究，因为道路连通的子集不一定道路连通，而满足半局部单连通要求的性质的子集一定还满足该性质，所以找 U 的时候应先找一个满足半局部单连通的要求的开邻域，再缩小来满足道路连通. 这也帮助我们记忆局部道路联通的定义是：对任意开邻域，都存在一个子的开邻域，是道路连通的.

定义集合 $U_\gamma=\big\{[\gamma*\lambda]_p \mid \lambda\text{是}U\text{中的道路且}\lambda(0)=\gamma(1)\big\}$.

我们必须说明 U_γ 的定义不依赖于 γ 的道路同伦类，这样 U_γ 才是 $[\gamma]_p$ 周围的一个集合.

不难验证 $p\big|_{U_\gamma}$ 是双射：

-

(3) $\widetilde{X}$ 上的拓扑.

$\mathcal{U} = \{U open, pathcon, semiloc\}$ 是 X 的拓扑的一组基.

(4) p 是覆叠映射.

$\square$

2 覆叠空间的分类

2.1 带有一般基本群的覆叠空间的存在性

2.2 覆叠空间的同构

定义 2.1. 我们称两个覆叠空间 $p_1:\widetilde{X}_1\to X$ 和 $p_2:\widetilde{X}_2\to X$ 是同构的如果存在一个同胚 $h:\widetilde{X}_1\to\widetilde{X}_2$ 使得下列图表交换

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X}_1 \arrow[rr, "\simeq", "h"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

容易验证是等价关系.

假设 $p_1:\widetilde{X}_1\to X$ 和 $p_2:\widetilde{X}_2\to X$ 是等价的，那么对于一个固定的 $x_0\in X$，$\tilde{x}_1\in p_1^{-1}(x_0)$. 取 $\tilde{x}_2=h(\tilde{x}_1)$，那么我们得到带点图表.

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1) \arrow[rr, "\simeq", "h"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

得到 $(p_1)_*(\pi_1(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1))=(p_2)_*(\pi_1(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2))$

命题 2.2. 设 X 是道路连通、局部道路连通的, $p_1:(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)\to(X,x_0)$, $p_2:(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)\to(X,x_0)$ 是两个道路连通的覆叠空间. 那么存在带点的覆叠空间同构 $h:(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)\to(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ 当且仅当 $(p_1)_*\pi=(p_2)_*\pi_1(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)$.

证明. 由提升性质， □

2.3 覆叠空间的唯一性

2.4 覆叠空间的分类

定理 2.3 (覆叠空间的分类定理). 设 X 道路连通，局部道路联通，半局部单连通.

(1) *[带基点]* 存在一个一一对应，道路连通覆叠空间的保基点的同构类，和，$\pi_1(X,x_0)$ 的子群.

(2) 不带基点. 存在一个一一对应，道路连通覆叠空间的同构类，和，$\pi_1(X,x_0)$ 的子群的共轭类.

推论 2.4. 设 $p_1:(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1)\to(X_1,x_0)$，$p_2:(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_2)\to(X_2,x_0)$，如果 $(p_1)_*(\pi_1(\widetilde{X}_1,\tilde{x}_1))\subset(p_2)_*(\pi_1(\widetilde{X}_2),\tilde{x}_2)$，那么存在覆叠 $p_3:(\widetilde{X_1},\tilde{x}_1)\to(\widetilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ 使得 $p_1=p_2\circ p_3$.

推论 2.5. 如果 $\hat{p}:\widehat{X}\to X$ 是万有覆叠,那么 $p:\widetilde{X}\to X$ 是一个覆叠,那么存在一个覆叠 $p':\widehat{X}\to\widetilde{X}$ 使得 $\hat{p}=p\circ p'$.

3 PSet11-2

(2)[Covering group]

Let G be a topological group.

(a) Prove: $\pi_1(G,e)$ is an abelian group.

(b) Prove: If γ_1, γ_2 are two loops in G based at e, then $[\gamma_1 * \gamma_2]_p = [\gamma_1 \cdot \gamma_2] = [\gamma_2 * \gamma_1]_p$.

(c) Let $p : \tilde{G} \to G$ be a covering space of G, path connected and locally path-connected. Define a map $m : \tilde{G} \times \tilde{G} \to G$ by

$$m(\tilde{a}, \tilde{b}) := p(\tilde{a}) \cdot p(\tilde{b}).$$

Prove: m can be lifted to a map $\tilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ with $\tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$.

(d) Prove: Any covering space of a topological group is a topological group.

证明.

(a)

(b)

(c)

(d)

□

(3)[Classify covering spaces]

(a) Find all path connected covering spaces of $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$

(b) Find all path connected covering spaces of $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

证明.

(a) $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$,全部子群为 $n\mathbb{Z}$,$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,故对 $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ 的万有覆盖 $\widetilde{X} = \left\{[\gamma]_p \middle| \gamma\text{是以}\mathbb{S}^1 \cap \mathbb{S}^2 = x_0\right\}$ 为基点的道路,定义等价关系 $[\gamma_1]_p \sim [\gamma_2]_p \iff [\gamma_1 * \bar{\gamma}_2]_p \in n\mathbb{Z}$,$\left\{\tilde{X}/\tilde{n}\right\}$ 即是同构一一下 $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ 的全部覆叠空间

(b) $\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}^2$,全部子群为 $1, (p,q)\mathbb{Z}^2, (p,q)\mathbb{Z}^2 + (r,s)\mathbb{Z}^2$,其中 $ps - qr \neq 0$,同 (a),它们与 $\mathbb{T}^2$ 全部覆叠空间一一对应.

□

Chapter 8

Van Kampen 定理

回忆在 Lec19 中，我们证明了对于 $n \geqslant 2$ 有 $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \{e\}$，通过用两个交集道路连通的单连通开集来覆盖 $\mathbb{S}^n$，并把 $\mathbb{S}^n$ 中的每个圈在道路同伦的意义下表示为若干个落在某个单连通开集的圈.

本章中我们将把这个方法推广到多于两个开集和这些开集不再单连通的情形.

1 一些群论

1.1 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 和 $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ 的基本群

我们已经看到 $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. 作为一个直接的推论，我们有 $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}^2$. 注意到 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 的基本群是有两个生成元的交换群.

1.2 自由群

参见近世代数笔记Abstract Algebra

1.3 群表现

参见近世代数笔记Abstract Algebra

1.4 群的自由积

现在我们定义群的自由积.

定义 1.1. *设 G, H 是群. 我们定义字为形式乘积*

$$s = s_1 s_2 \cdots s_n$$

其中 $s_i \in G$ 或 H 且 $n \geqslant 0$. 所有字的集合构成了一个群

$$G * H = \left\{ s_1 s_2 \cdots s_n \middle| s_i \in G \text{或} H \right\},$$

群运算是"连接两个字"和"反序". 称之为群 G 和群 H 的自由积.

类似地我们可以定义群族 G_α 的自由积为

$$*_\alpha G_\alpha = \left\{ s_1 s_2 \cdots s_n \middle| \forall i, \exists \alpha \text{ s.t. } s_i \in G_\alpha \right\}.$$

1.5 融合自由积

2 van Kampen 定理

2.1 van Kampen 定理

现在我们已经准备好陈述本讲的主要结果：van Kampen 定理. 它是一个强有力的工具，利用它我们能够通过对一些子集的基本群的了解来计算整个拓扑空间的基本群.

2.2 van Kampen 定理：一般版本

van Kampen 定理有下面的推广的版本，在其中用任意多个开集来覆盖 X 是被允许的. 因为最初的版本的证明和一般的版本的证明一样复杂，并且一般的版本并不是最初的版本的推论，我们将陈述并证明一般的版本.

定理 2.1 (van Kampen, 一般版本). 设 $\{U_\alpha\}$ 是 X 的一个开覆盖使得每个 U_α 是道路连通的且存在一个公共的基点 x_0 落在所有的 U_α 中. 令

$$j_\alpha : \pi_1(U_\alpha, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$$

是由嵌入映射 $U_\alpha \hookrightarrow X$ 诱导的群同态. 令

$$\Phi : *_\alpha \pi_1(U_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

是泛性质中描述过的提升群同态.

(1) 设每个交集 $U_\alpha \cap U_\beta$ 都是道路连通的，那么 Φ 是满射.

(2) 如果此外，每个交集 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 是道路连通的，那么 $\ker(\Phi)$ 是 N 的正规子群，由所有形如 $\iota_{\alpha\beta}\iota_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ 的所有元素生成.

2.3 van Kampen 定理的证明：一般版本

注记. 三个证明.

(1)

(2) *Grothendieck's proof Fulton*

3 PSet12-1

(1)[Smallest normal subgroup]

Let G be a group and $S \subset G$ be a subset.

(a) Let $\mathcal{N}_S = \left\{H \middle| H \text{ is a normal subgroup of } G \text{ and } S \subset H\right\}$ and let $\mathbb{N}_S = \cap H \in \mathcal{N}_S H$.Prove: N_S is a normal subgroup of G.

(b) Prove: N_S is generated by all conjuages of elements of S in G,i.e.

$$N_S = \left\{c_1 \cdots c_n \middle| n \geqslant 0, c_i = g_i s_i g_i^{-1} \text{for some} g_i \in G, s_i \in S \cup S^{-1}\right\}.$$

证明.

(a) $\forall g \in G, gN_S g^{-1} = g\left(\bigcap_{H \in \mathcal{N}_S} H\right)g^{-1} = \bigcap_{H \in \mathcal{N}_S} gHg^{-1} = \bigcap_{H \in \mathcal{N}_S} H = N_S$，故 $N_S \lhd G$.

(b) $S \subset N_S$ 且 $S^{-1} \subset N_S$,由 N_S 正规知 $N_S \supset \left\{c_1 \cdots c_n \middle| n \geqslant 0, c_i = g_i s_i g_i^{-1} \text{for some} g_i \in G, s_i \in S \cup S^{-1}\right\}$
另外，$H = \left\{c_1 \cdots c_n \middle| n \geqslant 0, c_i = g_i s_i g_i^{-1} \text{for some} g_i \in G, s_i \in S \cup S^{-1}\right\}$ 确实是包含 N_S 的正规子群，知 $N_S \subset H$.

$\square$

Chapter 9

基本群的应用

1 $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$ 的应用

$\pi_1(\mathbb{S}^1)$ 不仅是第一个非平凡的基本群，也是最重要的基本群. 我们列举一些应用：

1.1 计算许多简单空间的基本群

1.2 区分 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^n$

Spectral 不变量被广泛用于区分拓扑空间. 例如，

命题 1.1. 对于 $n \geqslant 3$，$\mathbb{R}^n$ 不同胚于 $\mathbb{R}^2$.

证明. 设 $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^2$，那么 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \simeq \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. 但

$$\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}, \quad \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \sim \mathbb{S}^1$$

且 $\pi_1(\mathbb{S}^{n-1}) = \{e\}$，$\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$，矛盾！ □

注记.

- 利用道路连通性，即 π_0，$\mathbb{R}$ 不同胚于 $\mathbb{R}^n$，其中 $n \geqslant 2$.
- 利用 π_1，我们刚刚看到了 $\mathbb{R}^2$ 不同胚于 $\mathbb{R}^n$，其中 $n \geqslant 3$.
- 一般地，利用 π_k 我们能证明 $\mathbb{R}^k$ 不同胚于 $\mathbb{R}^n$，其中 $n \geqslant k+1$.

1.3 无收缩

我们能够利用 π_1 来证明某个子空间不是整个空间的收缩核.

命题 1.2. $\mathbb{S}^1$ 不是闭单位圆盘 $\overline{\mathbb{D}}$ 的收缩核.

证明. 由 PSet10-1-3-(a)，如果 $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{S}^1$ 是一个收缩，那么 $r_* : \pi_1(\overline{\mathbb{D}}) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ 是一个满射，这是不可能的因为 $\pi_1(\overline{\mathbb{D}}) = \{e\}$. □

类似地我们可以证明：$\mathbb{S}^1$（作为赤道）不是 $\mathbb{S}^2$ 的收缩核，$\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ 不是 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{⊮}$ 的收缩核等.

有人可能会认为这个方法只对子空间的基本群大于全空间的基本群的情形奏效，事实并不如此：

命题 1.3. 边界的圆周不是 *Möbius* 带的收缩核.

证明. 记边界的 S^1 为 B，中心的 S^1 为 C.

考虑 $\iota : B \hookrightarrow M$，

$$\iota_*(1) = 2.$$

不存在 r_* 使得 $r_* \circ \iota_* = \mathrm{Id}$ □

1.4 Brouwer 不动点定理 $(n = 2)$

定理 1.4 (Brouwer 不动点定理)**.** 对于任意连续映射 $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$，存在 $p_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ 使得 $f(p_0) = p_0$.

证明. 假设 $f(p) \neq p$ 对所有 $p \in \overline{\mathbb{D}}$ 成立. 那么我们可以定义 $g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{S}^1$ 通过

$$g(p) = \mathbb{S}^1\text{与射线}\overline{f(p)p}\text{的交点}.$$

我们可以验证映射 g 是连续的，且 $g\big|_{\mathbb{S}^1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1}$，所以 $\mathbb{S}^1$ 是 $\overline{\mathbb{D}}$ 的收缩核，矛盾！ □

1.5 代数基本定理

定理 1.5 (代数基本定理)**.** $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ 在 $\mathbb{C}$ 上有根.

证明. 假设 $p(z) \neq 0$ 对任意 z 成立.

考虑 $f : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1, z \mapsto \dfrac{p(z)}{|p(z)|}$ □

1.6 Borsuk-Ulam 定理 $(n = 2)$

在 Lec15 中我们利用连通性，即 π_0，证明了下面的

定理 1.6 (Borsuk-Ulam，$n = 1$)**.** 对于任意连续映射 $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, 存在 $x_0 \in \mathbb{S}^1$ 使得 $f(x_0) = f(-x_0)$.

现在我们利用 π_1 来证明

定理 1.7 (Borsuk-Ulam，$n = 2$)**.** 对于任意连续映射 $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$, 存在 $x_0 \in \mathbb{S}^2$ 使得 $f(x_0) = f(-x_0)$.

证明. □

通过利用更高维的不变量例如同伦群或同调群，我们能够证明

定理 1.8 (Borsuk-Ulam)**.** 对于任意连续映射 $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$，存在 $x_0 \in \mathbb{S}^n$ 使得 $f(x_0) = f(-x_0)$.

推论 1.9. R^n 的任一子集都不同胚于 $\mathbb{S}^n$.

1.7 Borsuk-Ulam 和 Lusternik-Schnirelmann 对所有 n

1.8 火腿三明治定理

最后我们证明在 Lec1 中提到过的火腿三明治定理，但很遗憾我们只能证明 $n = 2$ 的版本，因为我们只对 $n = 2$ 的情形建立了 Borsuk-Ulam 定理. 只要你承认 Borsuk-Ulam 定理对一般的 n 成立你就能用类似的方式证明一般的 n 情形下的火腿三明治定理.

推论 1.10 (火腿三明治，$n = 2$)**.** 给定两个（好的，至少是可测的）$\mathbb{R}^2$ 中的有界集合，存在一条直线将二者同时一分为二.

证明. 对任意 □

2 基本群的其他应用

2.1 零伦

按定义任何到可缩空间的连续映射是零伦的.

命题 2.1. 我们有

(1) 任意连续映射 $f:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^1$ 是零伦的.

(2) 任意连续映射 $f:\mathbb{RP}^2\to\mathbb{S}^1$ 是零伦的.

2.2 找到所有覆叠空间

2.3 van Kampen 定理的应用：图的基本群

2.4 应用到代数学：Nielsen-Schreier 定理

2.5 van Kampen 定理的应用：$\mathbb{T}^2$ 的基本群

2.6 van Kampen 定理的应用：Σ_g 的基本群

2.7 应用到趣味数学：挂画

2.8 应用到趣味数学：盘子戏法

3 PSet12-2

(2)[Application fo van Kampen]
Use van Kampen theorem to compute the fundamental group of

(a) The Kelin bottle.

(b) The n-fold dunce cap.

证明.

(a) 在 K 上取一个小圆盘 D，$D\subset\overline{D}\subset\tilde{D}$，$\tilde{D}$ 是一个稍大的小圆盘，取 $U=K\backslash\overline{D}$，$V=\tilde{D}$，$\pi_1(U)\simeq\mathbb{Z}*\mathbb{Z},\pi_1(V)\simeq\{e\}$，$\pi_1(U\cap V)=\mathbb{Z}$，而 $i_*(1)=aba^{-1}b$，故 $\pi_1(K)=\langle a,b\big|bab=a\rangle$.

(b) $\pi_1(U)\simeq\mathbb{Z},\pi_1(V)=\{e\},\pi_1(U\cap V)\simeq\mathbb{Z}.i_*(1)=a^n$，所以 $\pi_1(U\cap V)\simeq\mathbb{Z}_n$.

□

Chapter 10

不动点定理和区域不变性

1 Brouwer 不动点定理

1.1 Brouwer 不动点定理

注记.

(1) $BFPT \Longleftrightarrow$ 不存在从 $\overline{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ 的收缩映射

$\Longleftrightarrow$ 从球面到自身的恒等映射不是零伦的.

$\Longrightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1}) \neq \{e\}$.

$\Longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ 不是可缩的.

(2) 一般地，我们称一个拓扑空间 X 具有不动点性质，是指任意 $f : X \to X$ 连续映射，存在 x_0 使得 $f(x_0) = x_0$ 拓扑性质.

(3) 下列空间不具有不动点性质

- 圆环，$A_{r,R}\overline{B(R)}\backslash B(r)$.

1.2 光滑性的好处

通常对于光滑映射证明一个定理要比连续映射更容易，因为我们有一个非常有力的工具：微分，换句话说，线性近似.

回忆如果 $U \subset \mathbb{R}^n$，$V \subset \mathbb{R}^m$ 是开集，且

$$f = (f_1, \cdots, f_m) : U \to V$$

是一个 C^1 映射，那么对于每个点 $x \in U$，微分 f_x 是一个线性映射

$$f_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

$$\vec{v} \mapsto f_x(\vec{v}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\vec{v} = \left(\sum_j \frac{\partial f_1}{x_j}v_j, \cdots, \sum_j \frac{\partial f_m}{\partial x_j}v_j\right)^T.$$

在数学分析中我们已经看到

- $(f \circ g)_x = f_{g(x)} \circ g_x$,
- $(\mathrm{Id}_U)_x = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

所以微分 d 是一个从“以 C^1 映射为态射的欧几里得区域范畴”到“以线性映射为态射的线性空间范畴”的函子.

为了阐明微分的好处，我们首先证明

定理 1.1 (维数不变性，光滑版本)**.** 设 $U \subset \mathbb{R}^n$，$V \subset \mathbb{R}^m$ 是开集. 如果 $m \neq n$，那么不存在任意 $\mathbb{C}^1$ 微分同胚 $f : U \to V$.

1.3 从“没有光滑收缩”到 Brouwer 不动点定理

回到 Brouwer 不动点定理的证明. 在我们给出证明之前，让我们首先回顾 $n = 2$ 情形的证明. 我们证明了如果 $f(p) \neq p$ 对任意 $p \in \mathbb{D}$，那么存在一个收缩映射 $g : \overline{D} \to \mathbb{S}^1$ 形如

$$g(p) = p + \lambda(p)(p - f(p)).$$

如果你仔细地计算，你会得到

$$\lambda(p) = \frac{-p \cdot (p - f(p)) + [(p \cdot (p - f(p)))^2 + |p - f(p)|^2(1 - |p|^2)]^{\frac{1}{2}}}{|p - f(p)|^2}.$$

为了证明 Brouwer 不动点定理，我们首先证明下面的“没有收缩定理”的光滑版本：

定理 1.2 (没有光滑收缩)**.** 不存在 C^1 映射 $f : \overline{B^n} \to \mathbb{S}^{n-1}$ 使得 $f\big|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{Id}$.

“没有光滑收缩”蕴含着“Brouwer 不动点定理” 设 $f : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$ 是连续的. 由 Stone-Weierstrass 定理，对每个 $l \in \mathbb{N}$ 存在一个连续映射 $p_l : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ 使得

$$|p_l(x) - f(x)| < \frac{1}{l}, \quad \forall x \in \overline{B^n}.$$

p_l 的像可能在球的外面. 但我们可以通过定义

$$f_l := \frac{l}{l+1} p_l$$

来收缩它. 那么 $f_l : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$ 是 C^1 的，并且 f_l 在 $\overline{B^n}$ 上一致收敛到 f.

如果 f_l 没有不动点，那么我们如二维的情形定义 $g_l : \overline{B^n} \to \mathbb{S}^{n-1}$. 那么 g_l 是 C^1 的，且 $g_l\big|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{Id}$，这与“没有光滑收缩”矛盾. 所以对任意 l，存在 $x_l \in \overline{B^n}$ 使得 $f_l(x_l) = x_l$. 选取一个收敛子列 $x_{l_i} \to x_0$，我们得到

$$f(x_0) = \lim_{i \to \infty} f_{l_i}(x_{l_i}) = \lim_{i \to \infty} x_{l_i} = x_0.$$

这样就完成了 Brouwer 不动点定理的证明.

1.4 没有光滑收缩：证明

1.5 Brouwer 不动点定理：第二种形式

1.6 无穷维中的 Brouwer 不动点定理：一个反例

Brouwer 不动点定理有许多推广. 一个自然的问题是：它对于无穷维空间成立吗？

例 1.3. 考虑 l^2-空间

$$X = l^2 = \left\{ (a_1, a_2, \cdots) \Big| \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty \right\}.$$

在第 2 讲中我们已经看到 X 是度量空间，其度量为

$$d((a_i), (b_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2}.$$

记 $\overline{B} = \overline{B(0,1)} \subset l^2$. 考虑映射

$$f : \overline{B} \to \overline{B}$$
$$a = (a_1, a_2, \cdots) \mapsto (\sqrt{1 - \|a\|_2^2})$$

1.7 无穷维中的不动点定理：Schauder 不动点定理

2 区域不变性

2.1 Brouwer 区域不变性和拓扑维数不变性

2.2 Brouwer 区域不变性：局部版本和它的证明

2.3 拓扑流形

3 PSet13-1

(2)[Brouwer's Fixed Point Theorem]
Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be any non-empty compact convex subset.

(a) Suppose K has non-empty interior. Prove: K is homeomorphic to $\overline{B^n}$.

(b) Prove: K has non-empty interior if and only if K is not contained in a proper hyperplayn.

(c) Prove Theorem 1.5.

证明.

(a) 通过平移和伸缩变换，不妨设 $\overline{B^n} \subset K$. 对 $x \in K$，设有射线 $OX \cap \partial K = y_k$. 定义

$$\varphi : K \to \overline{B^n}, x \mapsto \frac{x}{|y_x|}.$$

显然 φ 单且满，且 φ 连续，事实上，$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < |x_1 - x_2|$，$K$ 紧，$\overline{B^n}$Hausdorff，故 $\varphi : K \simeq \overline{B}^n$.

(b) K 内部非空时，由 $\operatorname{Int} V = \varnothing$，知 $K \subsetneq V$，而 $K \subsetneq V + x_0$ 时，令 $W = spanK$ 是 K 章程的线性空间. 若 $\dim W = m_x < n$，那么 $K \subset V$，矛盾. 故 $\dim W = n$，在 K 中可找到 n 个线性无关的向量，由 K 凸，设这 n 个向量中模最短为 l，$B(0,l) \subset K$，$\operatorname{Int} K \neq \varnothing$.

(c) 令 $V = spanK$，设 $\dim V = m$，有嵌入 $i : V \hookrightarrow \mathbb{R}^m$，设 $\tilde{K} = i(K)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的非空紧凸集，由 $(a)(b)$，有同样 $\varphi : \tilde{K} \to \overline{B}^m$，任意 $f : K \to K$ 诱导了 $\varphi \circ i \circ f \circ i^{-1} \circ \varphi^{-1} : \overline{B^m} \to \overline{B^m}$，设其不动点 y_0,$x_0 = i{-}1\varphi^{-1}(y_0)$，使得 $f(x_0) = x_0$.

□

Chapter 11

Jordan 曲线定理

1 弧和 Jordan 曲线

1.1 弧和 Jordan 曲线

1.2 弧不分离

2 Jordan 曲线定理

2.1 Jordan 曲线

2.2 Poincare-Miranda 定理和一个推论

2.3 Jordan 曲线定理的证明

2.4 一些注记

3 PSet13-2

(1)[Jordan curve theorem for other surfaces]

(a) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

成立，对 $\mathbb{S}^1 \simeq \gamma \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$，若 $[\gamma]_p = [e]$，那么由平面上的若当定理，沿某不过 γ 的直线剪开 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$，成一长方形，其被 γ 分成有界和无界两个连通分支，于是在 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 上也是如此；若 $[\gamma]_p = 1$，那么 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 被分为两个无界区域.

(b) $\mathbb{T}^2$ 不成立

(c) Mobius 带. 成立

(d) 不成立，如 $y = x$ 是 $\mathbb{RP}^2$ 中连接无穷远点的简单闭曲线，但 $\mathbb{RP}^{\nvDash} \setminus \{y = x\}$ 中的点可以通过其他无穷远点连接.

Chapter 12

曲线的分类

1 曲线的分类

本章我们研究一维流形. 我们想要证明的最主要的定理是下面的分类定理:

定理 1.1. 在同胚的意义下, 有且仅有 2 个不同的连通 1-流形: $\mathbb{S}^1$ 和 $\mathbb{R}^1$.

回忆如果 M 是一个 1-流形，那么对于任意 $x \in M$，存在开邻域 U 和同胚 $\varphi : U \to \mathbb{R}$. 我们称对 (φ, U) 是 x 附近的坐标卡. 尽管定理的证明是冗长的，想法却很清晰：将坐标卡粘起来得到更大的坐标卡直到不能粘为止.

1.1 两个坐标卡的交集

我们首先刻画两个坐标卡的交集:

引理 1.2. 设 (φ_1, U_1) 和 (φ_2, U_2) 是 1-流形 M 的两个坐标卡, 且 U_1 和 U_2 互不包含. 假设 $W \subset U_1 \cap U_2$ 是一个连通分支, $\varphi_1(W) = (a, b)$ 且 $\varphi_2(W) = (c, d)$, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. 此外, 假设转移映射 $\varphi_{12} := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (a, b) \to (c, d)$ 是单调递增的. 那么我们一定有

$$a \in \mathbb{R}, b = +\infty, c = -\infty, d \in \mathbb{R} \quad \text{或} \quad a = -\infty, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d = +\infty.$$

1.2 区间上的映射

1.3 黏结坐标卡

1.4 分类定理的证明

2 扭结和链环

2.1 扭结

2.2 扭结等价

2.3 扭结群

2.4 链环

在同胚的意义下，只有两个连通的 1 维流形，即

$$\mathbb{S}^1, \quad \mathbb{R}.$$

注记. 连通带边一维流形的分类：

$$[0,1], \quad [0,1)$$

设 $\varphi_1 : U_1 \overset{\simeq}{\rightarrow} \mathbb{R}, \varphi_2 : U_2 \overset{\simeq}{\rightarrow} \mathbb{R}$，设 W 时 $U_1 \cap U_2$ 的一个连通分支.
记 $\varphi_1(W) = (a,b)$，$\varphi_2(W) = (c,d)$.
$\varphi_{12}; \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (a,b) \to (c,d)$ 是同胚.

引理 2.1. 设 φ_{12} 单调递增，那么 $a \in \mathbb{R}, b = +\infty, c = -\infty, d \in \mathbb{R}$ 或 $a = -\infty, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d = +\infty$.

证明. 知道：

- $a, c \neq +\infty, b, d \neq -\infty$
- $(a,b), (c,d) \neq (-\infty, +\infty)$.

要证下面的情况不会发生

- $a, c \in \mathbb{R}$
- $b, c \in \mathbb{R}$

假设 $a, c \in \mathbb{R}$，那么

$$\varphi_1^{-1}(a) \in M, \varphi_2^{-1}(c) \in M.$$

断言，$\varphi_1^{-1}(a) = \varphi_2^{-1}(c)$.
考虑 $\varphi_1^{-1}(a) \subset U_a$，$\varphi_2^{-1}(c) \subset U_c$.
想要证明 $U_a \cap U_c \neq \varnothing$.
$\varphi_1(U_a)$ 是 a 点的开邻域，$\varphi_2(U_c)$ 是 c 点的开邻域.
考虑 $\varphi_{12} : (a,b) \to (c,d)$
因此 $\varphi_1 2((a, a+\varepsilon_1)) = (c, c+\varepsilon_2)$
$\varphi_{12}(U_a \cap (a,b)) \cap U_c \neq \varnothing$.
那么 □

引理 2.2. 任何连续单射 $(a,b) \to \mathbb{R}$ 是单调的.

引理 2.3. 设 $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = (a, +\infty)$，$\varphi_2(U_a \cap U_2) = (-\infty, b)$.

命题 2.4. 设 $(\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2)$ 是 1 维连通流形 M 的两个坐标卡，那么

(1) $U_1 \cap U_2$ 至多有两个连通分支.

(2) 若 $U_1 \cap U_2$ 是连通的，则存在 $\varphi, U_1 \cup U_2$

(3) 如果 $U_1 \cap U_2$ 有 2 个连通分支.

证明.

(1)

(2)

(3) 每一个分支必定要占掉一个无穷.

□

证明. 用克列多个坐标卡 (φ_i, U_i) 来覆盖 M.

令 $\tilde{U}_1 = U_1$，令 $\tilde{U}_{n+1} = \tilde{U}_n \cup U_{k(n)}$. 其中 $k(n)$ 是最小的 k 使得 $U_k \cap \tilde{U}_n \neq \varnothing$.

断言

$$\bigcup_n \tilde{U}_n = M$$

令 $\tilde{M} = \bigcup\limits_n \tilde{U}_n$，开集，连通

设 $x \in M \backslash \tilde{M}$.

取 m 是最小的下标使得 $x \in U_m$，那么

$$U_m \cap \tilde{M} = \varnothing.$$

这个技巧有点像实分析 Hahn 分解的证明.

(1) 存在 n 使得 $\tilde{U}_n \cap U_{k(n)}$ 有两个连通分支.

从而 $\tilde{U}_n \simeq U_{k(n)} \simeq \mathbb{S}^1$，那么它在 M 中是紧的，从而闭，从而既开又闭，从而就是 M.

(2)

□

定义 2.5. 扭结 K 是指 $\mathbb{S}^1$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的一个嵌入.

注记. *Jordan* 曲线定理告诉我们不存在二维扭结.

定义 2.6. 称扭结 $K_1 \simeq K_2$，是指存在 $H : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 连续

定义 2.7. 扭结群 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash K)$.

Chapter 13

曲面

各种各样的曲面

Chapter 14

拓扑的格

这玩意我觉得比较有趣. 我们知道紧 Hausdorff 空间有不多不少的开集，开集稍微多一点就不紧了，开集稍微少一点就不 Hausdorff 了，我比较好奇是否对任意 X 其上都有一个拓扑使得 X 成为紧 Hausdorff 空间，这样我们就要考虑 X 上全体拓扑构成的格.

可参见https://www.ams.org/journals/tran/1966-122-02/S0002-9947-1966-0190893-2/S0002-9947-1966-0190893-2.pdf

Chapter 15

另一条脉络

1 逐点收敛拓扑

设 $X = \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$ 是 $[0,1]$ 上实值函数全体构成的空间. 在 X 中我们可以像通常那样定义逐点收敛：

$$f_n \to f \text{ 如果 } f_n(x) \to f(x), \forall x \in [0,1].$$

令人惊讶的是我们能赋予 X 以合适的拓扑，$\mathscr{T}_{p.c.}$，使得逐点收敛就是拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_{p.c.})$ 中的收敛.

拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 定义为

$$\mathscr{T}_{p.c.} = \left\{ U \subset X \middle| \forall f_0 \in U, \exists x_1, \cdots, x_n \in [0,1] \text{ and } \varepsilon > 0, \text{ s.t. } U \supset \omega(f_0; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) \right\},$$

其中

$$\omega(f_0; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) := \left\{ f \in X \middle| |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

2 反派劳模

2.1 Sorgenfrey

- 第一可数
- 不第二可数，见 PSet03-1-(4).
- 可分
- 不局部紧，见 12-1-1.4.

2.2 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cofinite})$

紧性

分离性

- 余有限拓扑是满足 T1 公理的最弱拓扑.
- X 上的拓扑满足 T1 公理当且仅当它包含余有限拓扑.
- 如果 X 是有限集，余有限拓扑就是离散拓扑.
- 如果 X 是无限集，那么 $(X, \mathscr{T}_{cofinite})$ 不是 T2,T3,T4 的，因为不存在两个不交的非空开集.
  - 任取两个非空开集，想看 $U \cap V$ 是否是 $\varnothing$.
  - $U \cap V = (U^c \cup V^c)^c$，因为 U^c 和 V^c 都是有限集，有限集的并还是有限集，而 X 是无限集，因此 $U^c \cup V^c$ 不可能是全集，因此 $U \cap V$ 不可能是空集.

3 各种强弱

- 度量空间 $\Longrightarrow$ 第一可数

  例子

  - 离散拓扑也是度量拓扑，从而第一可数.

- 第二可数 $\Longrightarrow$ 第一可数

  反例：

  - Sorgenfrey line
  - $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{discrete})$

- 度量空间 $\not\Longleftarrow$ 第二可数：$(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{discrete})$
- 度量空间 + 完全有界 $\Longrightarrow$ 第二可数
- 第二可数 $\Longrightarrow$ 可分
- 度量空间 + 可分 $\Longrightarrow$ 第二可数
- 第二可数 +Huasdorff+ 正规 $\Longrightarrow$ 度量空间
- 第一可数 + 可分 $\not\Longrightarrow$ 第二可数
- 第一可数与可分互不蕴含
  -
  -

4 分离性

- (T2/Hausdorff) 不同两点存在不交开集分开它们
- (normal) 不交闭集存在不交开集分开它们

5 Hausdorff

- 定义：不同两点可以被不交开集分离开来.

  推论

  - 独点集是闭集（这实际上没有充分利用 Hausdorff 的条件）
  - 极限点唯一（这应该充分利用到了 Hausdorff）

6 第二可数

- 第二可数 $\Longrightarrow$ 第一可数
- 第二可数 $\Longrightarrow$ 可分
- 第二可数 $\Longrightarrow$Lindelöf
- 第一可数 + 可分 +Lindelöf$\not\Longrightarrow$ 第二可数

  反例：

  - Sorgenfrey！
- 度量空间中：第二可数 $\Longleftrightarrow$ 可分 $\Longleftrightarrow$Lindelöf

7 概念索引

- 仿紧性，Lec14
- $\pi_c(X)$，连通分支空间
- $\pi_0(X)$，道路连通分支空间
- $\Omega(X;x_0,x_1)$，固定端点的道路空间，Lec17Page1
- $[\gamma]_p$，γ 的道路同伦类
- $\pi(X;x_0,x_1)$，以 x_0 为起点以 x_1 为终点的道路同伦类空间，Lec18Page6
- $\pi(X)$，道路同伦类空间，上一条的并，Lec18Page7

8 待解决的问题

如果你解决了哪个问题，我可以请你喝奶茶.

- 目录太丑了，似乎节与节之间不可被分隔两页.
- 当 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 不可度量化时，$\mathcal{C}(X,Y)$ 是闭的吗（假定 X 紧生成，从而 $\mathcal{C}(X,Y)$ 对序列极限封闭）?
- 对于 $\mathscr{T}_{c.o.}$，$\mathcal{C}(X,Y)$ 对序列极限封闭吗？假如封闭，它是闭的吗？

Chapter 16

作业